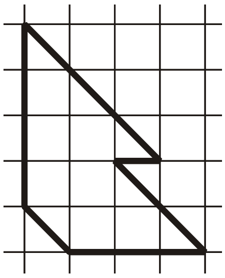
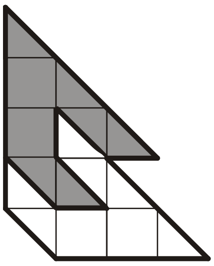
Зимний тур XXXIII Турнира Архимеда
Условия и решения задач

В задачах 1.1.-1.4. укажите ответ (в виде числа, рисунка и т.д.). Обоснования писать не требуется



Задача 1.1. На клетчатом столе лежит фигура (см. рис. справа), вырезанная из органического стекла. Требуется разрезать ее на две части так, чтобы их можно было совместить наложением. Резать можно по линиям сетки и диагоналям квадратов.

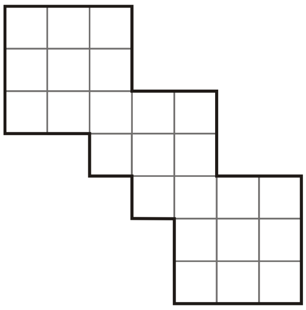
Ответ: см. рис.



Примечание: фигуры совместятся наложением при перевороте одной из фигур.

Комментарии Жюри:

- ✓ Верный ответ — 4 балла

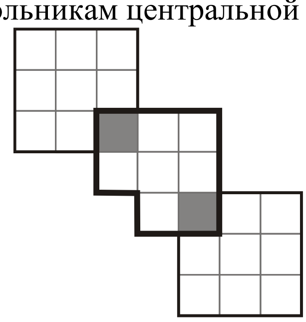


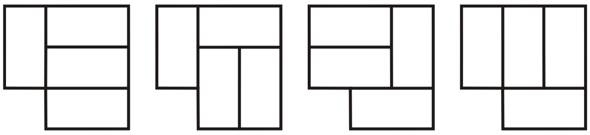
Задача 1.2. (5 баллов) Доминошки. Требуется клетчатую доску (рис. справа) разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×2. Сколькими способами это можно сделать? (Два способа разрезания считаются различными, если у них не все линии разрезов одинаковые).

Ответ: 64.

Решение (от участников не требовалось).

Заметим, что выделенные клетки (см. рис.) относятся к прямоугольникам центральной части, иначе разрезать доску невозможно.





Тогда задача сводится к разрезанию трех одинаковых досок меньшего размера. Каждую можно разрезать 4 способами. Итого, всего способов будет $4\cdot 4\cdot 4=64$.

Комментарии Жюри:

- ✓ Верный ответ — 5 баллов.
- ✓ Наряду с верным ответом указаны неверные — 1 балл

Задача 1.3. (5 баллов) Аня и Боря играли с числом *X*. В начале игры значение *X* было равно 1. Затем они по очереди изменяли значение этого числа: Аня умножала его на 3, а Боря вычитал 1, и так несколько раз. Первой ходила Аня. В итоге *X* оказалось равно числу, оканчивающемуся на 2. Известно, что Аня сделала не меньше 62 ходов, а Боря — не больше 64 ходов. Сколько всего ходов было сделано в игре, и чей ход был последним?

Ответ: а) 127 ходов,

б) последний ход сделан Аней.

Решения (от участников не требовалось):

Будем следить за последней цифрой:

$1(\times3)\to3(-1)\to2(\times3)\to6(-1)\to5(\times3)\to5(-1)\to4(\times3)\to2(-1)\to1(\times3)\to\ldots$ появился цикл.

В цикле всего 8 ходов, у каждого по 4 хода. Чисел оканчивающихся на 2 в цикле 2, они появляются на 2-м и 7-м ходе цикла.

Если Аня сделала больше 61 хода, то хотя бы 62 хода она сделала, а так как она первая, всего ходов было хотя бы 123.

Если Боря сделал меньше 65 ходов, то не больше 64, так как он второй, то всего ходов не больше 129.

Для получения цифры 2 на конце числа ходов должно быть сделано $8K+2$ или $8K+7$ ходов (где K – число циклов по 8 ходов). В диапазоне 123–129 нет чисел вида $8K+2$ (ближайшие к ним это числа 122 и 130). Значит, ходов было сделано $8\cdot15+7=127$. Следовательно, последний ход сделала Аня.

Комментарии Жюри:

- ✓ Только верный ответ а) — 3 балла
- ✓ Только верный ответ б) — 1 балл
- ✓ Оба верных ответа — 5 баллов
- ✓ в любом пункте наряду с верным ответом указаны неверные — 0 баллов за данный пункт

Задача 1.4. (6 баллов) С Новым годом! Чтобы открыть кладовую с подарками, Дед Мороз должен нажать на шесть кнопок кодового замка (рис. справа). Если сумма чисел, написанных на этих кнопках, равна 2024, то замок открывается. Пометьте кнопки, которые требуется нажать

438	240	418	276
256	348	258	382
292	310	296	328

Ответ: кнопки на рисунке выделены серым цветом (см. рис.).

438	240	**418**	276
256	**348**	258	**382**
292	310	296	**328**

Комментарий:

Ответ может быть записан и так: $256+292+328+348+382+418=2024$

Решение (от участников не требовалось).

Чтобы избежать полного перебора всех возможных комбинаций, можно обратить внимание на остатки от деления на 9 всех указанных чисел

6	6	4	6
4	6	6	4
4	4	8	4

У числа 2024 при делении на 9 остаток 8.

Для получения остатка 8 сумма остатков должна равняться 8, 17, 26, 35 и т.д. Заметим, что 17 и 35 не могут быть как нечетные числа (у нас все остатки четные), а числа меньше 17 и больше 35 суммой 6 чисел получить нельзя. Таким образом, мы должны рассмотреть числа, сумма остатков при делении на 9 которых даст сумму 26.

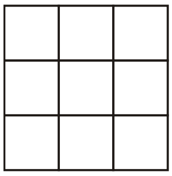
Единственный возможный вариант: $4+4+4+4+4+6=26$.

Сумма всех 6 чисел с остатками 4: $256+292+310+328+382+418=1986$. То есть нам требуется заменить одно из чисел на число с остатком 6, которое будет больше него на 38 (чтобы получить в сумме 2024). Прибавив 38 к каждому числу с остатками 4, получим, соответственно, 294, 330, 348, 366, 420, 454. Единственное из них – число 348 – есть среди кнопок, т.е. нам нужно заменить 310 на 348, чтобы получить 2024. И этот ответ единственный.

Комментарии Жюри:

- ✓ Верный ответ — 6 баллов.
- ✓ Ответ получен «двойным нажатие кнопки» — 0 баллов

В задачах 2.1.–2.4. все ответы должны быть обоснованы!



Задача 2.1. (6 баллов) Монеты. Коробка с монетами разделена на ячейки, как показано на рисунке. В каждой ячейке лежит одна монета. Часть монет настоящие, а остальные фальшивые. Все настоящие монеты имеют одинаковую массу, все фальшивые — тоже, но фальшивая монета легче настоящей. Все монеты внешне не различимы.

Если в ячейке лежит настоящая монета, то такая ячейка имеет общую сторону ровно с двумя ячейками с настоящими монетами. Возможно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти все настоящие монеты (на каждую чашу весов можно положить не более одной монеты)? Если да, объясните, как это сделать, если нет, объясните почему.

Ответ: можно.

Решение.

Пронумеруем монеты.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 1

1) Если центральная монета (5) настоящая, то она может граничить только с двумя настоящими монетами из четырех (2, 4, 6 или 8).

Любая настоящая монета, граничащая с ней, дополняется одной угловой и монетой вместе с ними образующей квадрат.

Вторая, граничащая с ней, образует еще квадрат. Если эти квадраты разные, то противоречие, если одинаковые, то противоречие.

То есть с центральной настоящей клеткой, могут граничить монеты, образующие «уголок», а значит, квадрат (рис.2)

Если центральная монета фальшивая, то настоящие монеты образуют контур квадрата (рис. 3), каждая из ячеек по периметру имеют ровно две общие стороны с двумя другими ячейками.

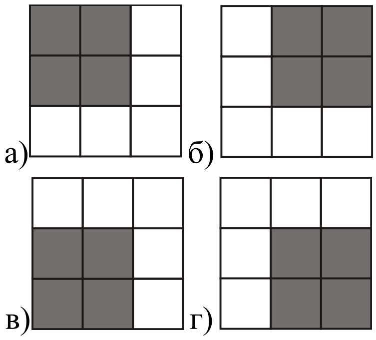


Рис. 2

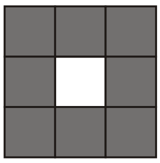


Рис. 3

Возможны разные способы определения всех настоящих монет за два взвешивания.

Вот некоторые из них:

Способ 1.

1) Взвесим 1 и 9 монету.

2) Если одна перевесила, то настоящие монеты образуют область 2×2, расположенную в том углу, где, лежат более тяжелые монеты (рис. 2а или 2г, соответственно). Если монеты равны, проведем второе взвешивание.

3) Взвесим 3 и 7 монету.

4) Если одна перевесила, то настоящие монеты образуют область 2×2, расположенную в том углу, где, лежат настоящие монеты (рис. 2б или 2в).

5) Если монеты равны, то настоящие монеты контур квадрата (рис. 3).

Способ 2.

1) Взвесим 1 и 5 монету.

Если перевесила монета 1, то настоящие монеты образуют контур квадрата (рис. 3).

Если равенство, то настоящие монеты 1, 2, 4, 5 (рис. 2а).

Если перевесила монета 5, проведем второе взвешивание. Настоящие монеты образуют область 2×2, исходящую из углов 3, 7 или 9 (рис. 2б, или 2в, или 2г, соответственно).

2) Сравним 3 и 7 монету, найдем какая из трех монет 3, 7 или 9 тяжелая. Настоящие монеты образуют область 2×2, расположенную в том углу, где, лежат более тяжелые монеты (рис. 2).

Возможны и другие верные алгоритмы.

Комментарии Жюри:

✓ **Полное верное решение — 6 баллов.**

Верное решение складывается из:

✓ **утверждение, что настоящие монеты всегда образуют либо область 2×2 (все 4 варианта, а не только один из них), либо «контур» при отсутствии неверных комбинаций — 1 балл за каждый вариант, т.е. всего 2 балла максимум**

✓ **Доказано, что настоящие монеты образуют либо область 2×2, либо «контур» (для обоих вариантов, а не только для одного) — +2 балла**

Отметим, что это была наиболее частая причина снижения числа баллов за решение задачи

✓ **Приведен верный алгоритм поиска настоящих монет за два взвешивания (т.е. всех пяти положений настоящих монет) – +2 балла**

О некоторых частых случаях, встречающихся в работах участников:

✓ ***Если решение базируется на мнении, что все монеты могут быть фальшивыми, то есть к вариантам в рассмотрении добавлен 6 случай, решение оценивается аналогично, алгоритм взвешивания должен позволять различить все 6 случаев — минус 1 балл от общей суммы (так как в условии четко указано, что есть оба типа монет — обратите внимание на слово «часть»)***

✓ **Верный ответ «можно», опирающийся на верный алгоритм, но не разобранный до конца – 1 балл**

✓ **Только ответ без решения — 0 баллов.**

✓ **Алгоритм учитывает только один вариант (2×2 либо «контур») — 0 баллов.**

Задача 2.2. (6 баллов) Мячик. Дядя Федор и пес Шарик стояли в реке недалеко от берега. Дядя Федор кинул вдоль берега два мячика (синий и красный) против течения реки так, что они упали в воду одновременно.

Когда мячики коснулись воды, Шарик поплыл им навстречу. Схватив красный мячик, он отнес его Дяде Федору, а затем поплыл за синим. Синий мячик он подобрал на том же месте, что и красный. Известно, что собственная скорость Шарика постоянна и втрое больше скорости течения реки. Во сколько раз дальше улетел синий мячик, нежели красный?

Ответ: В 1,5 раза.

Решение.

Пусть скорость реки a. Тогда собственная скорость собаки $3a$, скорость собаки по течению $4a$, против течения $2a$, соответственно.

Пусть первый мячик отлетел на расстояние $3X$.

Тогда пока мячик проплывет расстояние X, собака против течения проплывет $2X$ и возьмет мяч. Второй мячик за это время тоже проплыл X.

Пока собака плывет обратно $2X$ (скорость ее сейчас вдвое больше, чем была против течения), второй мячик проплывает $0{,}5X$.

И сейчас он должен оказаться в той же точке, в которую приземлился первый мячик (чтобы встретится с собакой в той же точке, что и первый).

Значит, второй отлетел на расстояние $3X + X + 0{,}5X = 4{,}5X$. Это в полтора раза дальше, чем первый.

Можно также записать решение графически, указав на рисунке все расстояния и перемещения.

Комментарии Жюри:

✓ **Приведено полное решение – 6 баллов**

✓ **Верное решение, но арифметическая ошибка в последнем действии (например, получено 4,5, но неверно найдено соотношение) — 5 баллов**

✓ **Верное решение получено на конкретных значениях скоростей или расстояний — 5 баллов**

✓ **Приведен только верный ответ — 1 балл**

✓ **Не редко участники получали верный ответ при неверном решении — в таких случаях было принято решение ставить 1 балл за верный ответ.**

— Например (наиболее часто), это происходило в тех случаях, когда не учитывалось действие течения реки на скорость Шарика*. Расчет при заданных в условиях значений приводит в верному ответу, но описывает не соответствующую реальной ситуацию:

**** в таких случаях, как правило, встреча Шарика и мячиков происходила на расстоянии 3/4, а не 2/3 как это было на само деле, от расстоянии между Дядей Федором и местом падения первого мячика). Чаще всего ответ получался соотношением 6/4.***

**** скорость Шарика принималась средней в 3 условные единицы, что не соответствует действительности.***

Задача 2.3. (8 баллов) Званый обед. За большим круглым столом собрались 2024 гостя — жители острова Рыцарей (всегда говорят правду) и Лжецов (всегда лгут).

Перед началом обеда каждого гостя сфотографировали вместе с двумя его соседями, сидящими слева и справа от него, а по окончании обеда каждый гость получил красивый альбом с тремя фотографиями с его участием. Остальные фотографии (без этого гостя) каждый получил по электронной почте.

Каждый из гостей, просмотрев присланные фотографии, оставил два комментария в общем чате:

1) «На каждом фото лжецов больше, чем рыцарей»;

2) «Во время обеда за столом сидело ... рыцарей». Здесь каждый указал на месте многоточия некоторое число, которое в конце дня удалил модератор.

Сколько рыцарей было за столом? Мог ли модератор узнать, кто из них рыцарь, а кто лжец?

Ответ: а) всего 2 рыцаря, **б)** мог!

Решение.

1) Все лжецами быть не могут (иначе их высказывания правдивы).

2) Все рыцарями быть не могут (иначе их высказывания ложны), то есть и те и другие.

3) Так как лжецы врут, то высказывание «На всех фото лжецов больше, чем рыцарей» не верно и есть фото, где рыцарей больше, чем лжецов, то есть рыцарей не меньше 2, то есть как минимум одна фотография, на которой их 2 или 3.

4) Может ли на этой фотографии быть 3 рыцаря? Нет, так для крайнего из них будет фото, где рыцарей больше (соседняя тройка!)

5) Следовательно, всего рыцарей на фотографии не более двух.

6) Может ли рыцарь быть на другой фотографии? Тогда на рассмотренной уже фотографии он увидеть двух рыцарей, значит сказать, что «На всех фото лжецов больше, чем рыцарей» он не мог. Следовательно рыцарей не более двух.

7) Пример рассадки, где рыцарей ровно 2 на рис. 1.

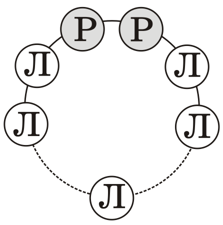


Рис. 1

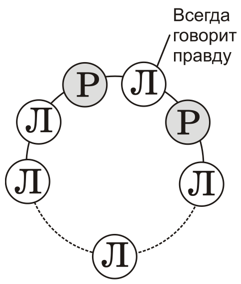


Рис. 2

Комментарий. Ситуация, где рыцари не сидят рядом, невозможна (см. рис. 2). Тогда, лжец, сидевший между рыцарями, на каждой фотографии увидит лжецов больше, чем рыцарей, чего быть не может. В остальных случаях не будет фотографий, где присутствуют два рыцаря.

Заметим, что только рыцарь мог написать верное общее число рыцарей, то есть по написанному верному числу рыцарей модератор и мог их узнать.

Комментарии Жюри:

- ✓ **А) Приведено полное решение (доказано, что рыцарей только 2) + приведена правильная рассадка — 7 баллов**
- ✓ **Б) Приведен верный ответ на вопрос б) + полное обоснование — 1 балл**

Полное решение (8 баллов) складывались из:

- ✓ **Верный ответ в пункте а) — +1 балл**
- ✓ **Показано, что присутствуют и рыцари, и лжецы — +1 балл**
- ✓ **Показано, что меньше 2-х рыцарей быть не может — +1 балл**
- ✓ **Приведен верный пример для двух рыцарей — +1 балла**
- ✓ **Выполнена проверка верного примера — +1 балл**
- ✓ **Доказано, что больше 2-х рыцарей быть не может — +2 балла**
- ✓ **Показано, как модератор узнает рыцарей — +1 балл**

- ✓ **Верный ответ на пункт б) без верного обоснования (в т.ч. ссылка на неверное число рыцарей) — 0 баллов**

Задача 2.4. (10 баллов) Медвежье счастье. Лиса хочет купить двум медвежатам мешок яблок, чтобы медвежата могли поделить их так, что у каждого оказалось одинаковое количество яблок.

Медвежонок счастлив, если среди доставшихся ему яблок окажется не менее пяти зеленых и двух желтых яблок, или не менее пяти зеленых и двух красных яблок, или не менее пяти желтых и двух красных яблок, но всего не менее 17 яблок. Лиса сама решает, какого цвета яблоки класть в мешок.

Медвежата делят яблоки так. Сначала первый медвежонок, не глядя, берет из мешка одно яблоко, затем второй берет одно, затем опять первый, и так далее, пока яблоки не кончатся.

Какое наименьшее количество яблок Лиса должна положить в мешок, чтобы медвежата наверняка были счастливы, как бы они яблоки ни поделили? Укажите цвета этих яблок.

Ответ: 36 яблок: 15 зеленых, 12 желтых, 9 красных.

Решение:

1. Предположим, что лиса смогла собрать подходящий мешок яблок.

Каждого цвета должно быть строго меньше половины, иначе одному из медвежат может достаться только этот цвет, и он не будет счастлив. Значит, любые два цвета в сумме составляют больше половины всех яблок, поэтому одному медвежонку могут достаться яблоки только двух цветов. Это может случиться с любыми двумя цветами, значит, в мешке **обязательно есть 5 зелёных, 5 жёлтых и 2 красных яблока**.

Так как медвежонок будет счастлив, если ему достанется не менее 17, то всего яблок не менее 34. Если яблок в мешке 34, то:

1) Зеленых яблок – не больше 14. Иначе, если их 15 или больше, то, поскольку у нас точно есть еще желтое и красное, одному медвежонку могут достаться 15 зеленых 1 красное, 1 желтое яблоко, и он не будет счастлив

2) Красных не больше 8. Если их 9 или больше, тогда поскольку у нас точно есть 5 зелёных и 5 жёлтых, одному медвежонку может достаться 4 зелёных, 9 красных и 4 жёлтых, и он не будет счастлив.

3) Жёлтых не больше 11. Если их 12 или больше, тогда поскольку у нас точно есть 5 зелёных и 2 красных, одному медвежонку может достаться 4 зелёных, 1 красный и 12 жёлтых, и он не будет счастлив.

4) Получается, что всего у нас не более 14+8+11=33 яблока, а должно быть 34. Значит, мешок с 34 яблоками не подойдет, и нужно не менее 36 яблок

2. Покажем, что 36 яблок хватит.

Разложим так: 15 зеленых, 12 желтых, 9 красных.

Каждый мишка получит 18 яблок

Если он получил менее 5 зелёных, то среди 14 или более остальных не более 12 жёлтых, а значит, не менее 2 красных. С другой стороны, среди 14 или более не зелёных не более 9 красных, значит, найдется 5 жёлтых, и мишка будет счастлив, получив набор 5Ж+2К.

Если медведь получил от 5 до 15 зелёных, у него есть не менее 3 яблок других цветов. По принципу Дирихле не менее двух из них одного цвета. Найдется комбинация 5З и 2Ж или 5З и 2К.

Комментарии Жюри:

- ✓ **Приведено полное решение — 10 баллов**

Верное решение складывалось из:

- ✓ **Приведен только верный ответ числа яблок (36) — +1 балл**
- ✓ **Верно указана комбинация цвета всех 36 яблок — +3 балла**
- ✓ **Показано, что при указанной комбинации цвета 36 яблок, условие выполняется — +2 балла**
- ✓ **Доказано, что 34 яблока не хватит — +4 балла**

Доказательство, что 34 яблока не хватит, включает:

- ✓ **Доказано, что обязательно есть 3 цвета — +1 балл**
- ✓ **Есть доказательство, подобное рассуждениям 1)...4) в решении — +3 балла**

(Примечание: при отсутствии доказательства присутствия яблок всех трех цветов ставилось от 1 до 3 баллов в зависимости от подробности и обоснованности рассуждений)