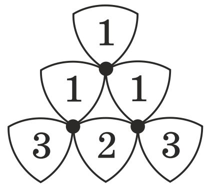
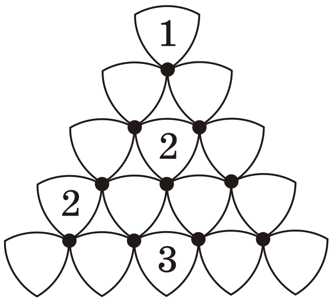
Зимний тур XXXII Турнира Архимеда
Условия и решения задач

В задачах 1.1.-1.4. укажите ответ в виде числа или рисунка. Обоснования писать не требуется!

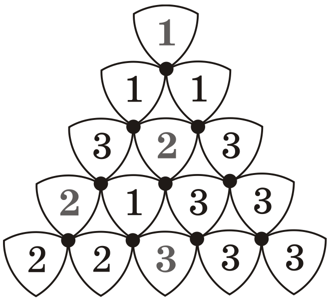
Задача 1.1. (5 баллов) Из лепестков сложен треугольник. Требуется заполнить лепестки на рисунке числами 1, 2 и 3 так, чтобы в каждом лепестке было записано ровно одно число и соблюдалось правило: если три лепестка касаются одного и того же чёрного кружочка, то числа в них либо все одинаковые, либо все разные. Вася заполнил числами 4 лепестка. Помогите ему заполнить все лепестки в соответствии с правилом, но так, чтобы сумма чисел в треугольнике была максимальной.

Пример возможного варианта заполнения

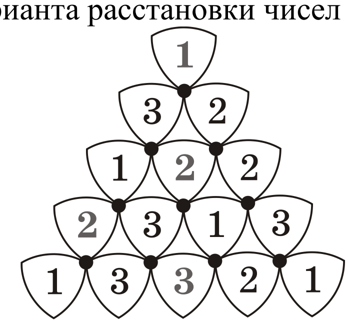




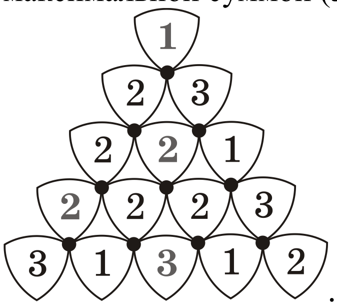
Ответ: сумма = 33, см. рис.



Ответ единственный. Доказывать не требуется.
Возможны два варианта расстановки чисел с не максимальной суммой (30): см. рис.



или

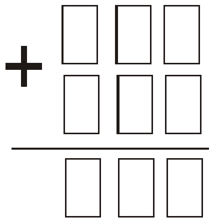


.

Комментарии Жюри:

- Верный пример и верная сумма — 5 баллов
- Верный пример, сумма подсчитана неверно — 4 балла
- Верный пример с не максимальной суммой (30) — 2 балла
- Верный пример с не максимальной суммой, сумма подсчитана неверно — 1 балл
- Отсутствие примера с любой суммой — 0 баллов

Задача 1.2. (5 баллов) На столе выложены карточки в виде примера на сложение (см. рис). Оксана на каждой карточке написала по одной цифре (цифры не обязательно разные). Получился пример с верным ответом. Федя переложил карточки в первых двух строках (третью строку он не трогал) — ни одна из карточек не оказалась в том же числовом разряде, где была, поэтому ответ оказался неверным. На помощь пришла Настя. Ей удалось, поменяв одну карточку в третьей строке на свою карточку с другой цифрой, получить пример с верным ответом. Какими могли бы быть примеры Оксаны, Феди и Насти? Придумайте подходящий набор примеров. Достаточно одного набора.



Ответы: например,

$\begin{array}{r} \boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4} \\ +\;\boxed{5}\,\boxed{7}\,\boxed{6} \\ \hline \boxed{8}\,\boxed{1}\,\boxed{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} \boxed{3}\,\boxed{5}\,\boxed{2} \\ +\;\boxed{4}\,\boxed{6}\,\boxed{7} \\ \hline \boxed{8}\,\boxed{1}\,\boxed{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} \boxed{3}\,\boxed{5}\,\boxed{2} \\ +\;\boxed{4}\,\boxed{6}\,\boxed{7} \\ \hline \boxed{8}\,\boxed{1}\,\boxed{9} \end{array}$
Пример Оксаны	Пример Феди	Пример Насти

Отметим, что в данном примере использованы все 10 различных карточек по одному разу. При этом, каждый разряд в слагаемых (сотни, десятки, единицы) можно менять местами без влияния на решение.

Возможны и другие многочисленные варианты решений в т.ч. с повторяющимися карточками.

Решение (от участников не требовалось):

Принцип построения примеров. Заметим, что от перестановки карточек среди слагаемых не меняется остаток деления на 9. Значит, в ответе остаток должен остаться тем же, а это возможно только если исправляем цифру с тем же остатком – это 9 и 0. При этом замена возможна либо в разряде десятков, либо разряде единиц.

Комментарии Жюри:

- Верные примеры — 5 баллов
- Карточка с цифрой "0" в начале любого числа — 0 баллов

Наиболее распространенной ошибкой было не поменять разряд (сотни, десятки или единицы) у тех или иных карточек — за это ставилось 0 баллов.

Задача 1.3. (5 баллов) Два золотоискателя делят добытое золото. Всего у них 9 самородков весом соответственно 64, 68, 40, 34, 8, 13, 16, 32 и 48 г. Золотоискатели кладут самородки на чашечные весы так, чтобы получилось равновесие (если не получается, то можно некоторые самородки на весы не класть). Если весы в равновесии, золотоискатели забирают золото с чашек, всё остальное берет бригадир. Сколько золота гарантированно получит бригадир? Укажите, как при этом достигается равновесие на весах.

Ответ: бригадир гарантированно получит не менее 115 г золота. На весах остались самородки: $64 + 40 = 104 = 8 + 16 + 32 + 48$ или $64+32+8=104=16+40+48$.

Решения (от участников не требовалось):

1) Общий вес самородков нечетен. Следовательно, все их уравновесить нельзя. Причем, при удалении любого количества самородков с четным весом это исправить нельзя. Придется в любом случае отдать бригадиру самородок весом 13 г.

2) Вес всех оставшихся самородков кроме одного кратен 4, значит, одна чаша весов будет давать вес, кратный 4, другая – нет. Следовательно, их уравновесить снова не получится. Только отдав бригадиру самородок весом 34 г это можно исправить.

3) Аналогично, вес всех оставшихся самородков кроме одного кратен 8. Придется отдать бригадиру самородок весом 68 г.

4) Остальные самородки можно уравновесить: $64 + 40 = 104 = 8 + 16 + 32 + 48$ или $64+32+8=104=16+40+48$. Таким образом, бригадир гарантировано получит $13 + 34 + 68 = 115$ г золота.

Комментарии Жюри:

- Верный ответ + показано верное равновесие на весах — 5 баллов
- Верный ответ + Верное равновесие на весах, но арифметическая ошибка или указан только общий вес на весах (104) — 4 балла
- Верный ответ, но нет примера или неверное равновесие — 3 балла
- Нет ответа, но верное равновесие (указаны все самородки) — 3 балла
- Нет ответа, но верное равновесие (только 104) — 2 балла

Задача 1.4. (5 баллов) Хакер Вася испортил секретную информацию, представленную в виде ряда натуральных чисел. Известно, что у него было 4 вируса:

1) Вирус «А» стирает все числа, кратные 3.
2) Вирус «Б» стирает все числа, при делении на 5 дающие остаток 2.
3) Вирус «Г» стирает все числа, большие 17, но не превосходящие 33.
4) Вирус «Д» стирает все числа, кратные 4.

Выяснилось, что вирус «А» стёр числа 9, 18, 90, 99; вирус «Б» — 2, 7, 17, 62, 67; вирус «Г» — 22, 23, 25, 29; вирус «Д» — 16, 32, 36, 44 и 88. В каком порядке Вася запускал вирусы?

Ответ: см. таблицу:

Порядок	**1**	**2**	**3**	**4**
Вирусы	«Д»	«А»	«Г»	«Б»

Решение (от участников не требовалось):

Вирус «Д» стер число, кратное 3 (36), делящиеся на 5 с остатком 2 (32) и в диапазоне от 18 до 33 (32). Вирус «Д» запущен ранее остальных.

Вирус «А» стер число в диапазоне от 18 до 33 (18), он запущен раньше вируса «Г». А с вирусом «Б» пока не ясно.

Вирус «Г» стер число, делящиеся на 5 с остатком 2 (22), т.е. он запущен раньше вируса «Б».

Итого: вирусы запускались в следующем порядке: **«**Д», «А», «Г», «Б»**.**

Комментарии Жюри:

- Верно заполнена таблица — 5 баллов.

В задачах 2.1.–2.4. все ответы должны быть обоснованы!

Задача 2.1. (6 баллов) Конь Юлий, заработав тяжким трудом 100 золотых и 100 серебряных монет, решил отдохнуть на Бали. В рекламе вклада «Дупло дуба» сказано, что если «положить в дупло» 1 золотую монету, то счёт в банке Бали вырастет на 4 рупии, а если 1 серебряную, то на 2. Все так и оказалось, но Юлию «забыли» объяснить, что при «взносе в дупло» нескольких монет сразу (не одной!) власти Бали взимают комиссию в 25% размера взноса (в рупиях). В результате, вложив все свои деньги, Юлий обнаружил на счёте всего 454 рупии. Сколько раз Юлий «положил в дупло» ровно 1 золотую монету, если ровно 1 серебряную монету он положил 2 раза?

Ответ: 3 раза.

Решение.

1) Если бы Юлий клал монеты по одной, получилось бы $100\cdot4+100\cdot2=600$ рупий. Следовательно, недостает $600-454=146$ рупий.

2) Комиссия 146 рупий берется с суммы $146\times4=584$ рупии, следовательно, без комиссии зачислено на счет 16 рупий.

3) Так как ровно по 1 серебряной монете Конь Юлий клал только ровно 2 раза, то это дало 4 рупии.

4) Остальные 12 рупий зачислены на счет за 3 золотые монеты.

5) Отсюда следует, что по 1 золотой монете Конь Юлий положил 3 раза.

Можно решить задачу и другими способами (например, первоначально вычтя из итоговой суммы все рупии, полученные за серебряные монеты или в общем виде через уравнение)

Комментарии Жюри:

- Полное решение — 6 баллов

- Приведены верные рассуждения и верный ответ, но не доказано, что не может быть других ответов (*например, приведена только проверка ответа из нескольких возможных случаев*) — 4 балла
- Верный ответ без обоснования — 1 балл
- Неверный ответ — 0 баллов

Задача 2.2. (6 баллов) В гостях у Кролика Винни-Пух и Пятачок получили по банке меда (разного размера) и сели завтракать. Если бы они сели за стол одновременно, то и завтрак бы закончили одновременно — в 10:00. Но Пятачок (как воспитанный поросенок) первые 12 минут мыл руки. Винни-Пух, закончив свою порцию, стал «помогать» другу, и в 10:03 они доели весь мед. Во сколько раз порция Винни-Пуха больше порции Пятачка?

Ответ: в 3 раза.

Решение.

Если бы Винни-Пух не помогал, то Пятачок закончил бы свою порцию в 10:12.

То есть с 10:03 до 10:12 Пятачок ел бы ту часть, с которой помог ему Винни-Пух. На эту часть он потратил бы 9 минут.

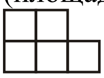
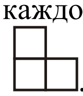
Винни-Пух ту же часть ел с 10:00 до 10:03, то есть 3 минуты.

Значит, скорость Винни-Пуха в 3 раза больше. Так как на свои порции они тратят поровну времени, то порция Винни-Пуха больше в 3 раза.

Комментарии Жюри:

- Полное решение — 6 баллов
- Ответ получен рассмотрением частного случая — 2 балла

  Самой распространенным таким решением было получение ответа из случая, когда Винни-Пух и Пятачок ели всю банку мёда Пятачка ровно 3 минуты одновременно, что совсем не обязательно: Пятачок мог начать свой завтрак как до 10:00 (т.е. их завтрак начинался раньше 09:48), так и после 10:00 (т.е. их завтрак начинался между 09:48 и 09:51).
- Верный ответ без обоснования — 1 балл
- Неверный ответ — 0 баллов

Задача 2.3. (9 баллов) План дачного поселка представляет собой клетчатый квадрат 8×8 (площадь каждой клетки — 1 сотка — квадрат со стороной 10 м), разбитый на участки двух видов:
 и .

Участки разделены заборами. Какой могла быть суммарная длина заборов между участками, если участков размером в 5 соток меньше, чем участков размером в 3 сотки? Укажите все ответы и объясните, почему других нет. Приведите примеры.

Ответ: 660 или 610 м.

Решение.

Пусть имеется Y участков в 5 соток и X участков в 3 сотки.

Тогда $5Y+3X=64$ сотки.

Заметим, что участков в 5 соток не более 12, т.к. $13\cdot 5=65>64$.

Рассмотрим все варианты того, сколько могло быть участков в 5 соток.

Если Y четно, то $5Y$ оканчивается на 0, тогда $3X$ оканчивается на 4. Среди таких чисел на 3 делятся 24 и 54, то есть 1) $Y=8$ и $X=8$ или $Y=2$ и $X=18$ соответственно.

Если Y нечетно, то $5Y$ оканчивается на 5, тогда $3X$ оканчивается на 9. Среди таких чисел на 3 делятся 9 и 39. то есть $Y=11$ и $X=3$ или $Y=5$ и $X=13$ соответственно.

(Возможен перебор по Y от 1 до 7).

Так как участков в 5 соток меньше участков в 3 сотки, то возможны только два варианта:

1) 2 участка в 5 соток и 18 участков в 3 сотки

или

2) 5 участков в 5 соток и 13 участков в 3 сотки.

Периметр участка в 5 соток = 100 м, а участка в 3 сотки = 80 м. Тогда сумма периметров участков равна $2 \cdot 100 + 18 \cdot 80 = 1640$ м или $5 \cdot 100 + 13 \cdot 80 = 1540$ м соответственно. Сумма периметров складывается из внешнего периметра поселка и удвоенной длины заборов. Периметр дачного поселка равен $8 \cdot 40 = 320$ м. Тогда общая длина заборов равна $(1640 - 320) : 2 = 660$ м или $(1540 - 320) : 2 = 610$ м соответственно.

Вариант завершения решения.

Аналогично решению 1. находим, что возможны только два варианта поселка:

1) 2 участка в 5 соток и 18 участков в 3 сотки

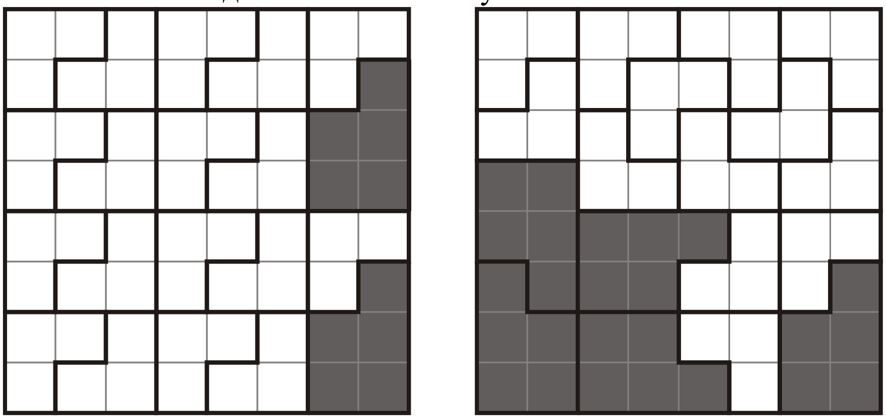
или

2) 5 участков в 5 соток и 13 участков в 3 сотки.

Далее можно посчитать все границы соток, которые есть в поселке. В участке в 5 соток НЕТ 5 заборов, в участке в 3 сотки нет 2 заборов.

Тогда можно найти длину, вычитая из всех возможных $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$ заборов.

Убедимся, что все эти ответы действительно могут быть.



2 и 18 5 и 13.

Комментарии Жюри:

- «+» Правильный пример (правильные: рисунок и длина забора) — 2 балла
- «+» Два правильных примера (правильные: рисунок и длина забора) — 4 балла
- «+» Доказано, что других (кроме $(2;18)$ и $(5;13)$) соотношений размеров участков не бывает — 3 балла
- «+» Утверждается, но не доказано, что других соотношений не бывает — 1 балл
- «+» Показано, что длина забора равна сумме периметров, деленной на 2 — 2 балла
- «+» Полное решение – 9 баллов (4+3+2)

- «-» длина выражена в сторонах квадрата (в каждом случае) — минус 1 балл
- «-» арифметическая ошибка при верном ходе решения (в каждом примере) — минус 1 балл
- «-» верный ответ, но с добавлением внешнего периметра (в каждом случае) — минус 1 балл

Задача 2.4. (10 баллов) Заминированные клетки прямоугольника 5×9 образуют квадрат 2×2. У сапёра есть прибор, с помощью которого можно выделить любую группу клеток, и, если среди выделенных клеток есть хотя бы одна клетка с миной, то на приборе загорается лампочка. Предложите способ, позволяющий гарантированно найти все заминированные клетки за наименьшее число измерений. Докажите, что не существует способа, позволяющего гарантировано найти все заминированные клетки за меньшее число измерений.

Решения.

I. Покажем, как найти все заминированные клетки за 5 измерений.

Решение 1.

1) Делим прямоугольник на 4×5 и 5×5. Спрашиваем про 4×5. В зависимости от ответа, получим прямоугольник, размером не более 5×5, содержащий все мины.

2) Далее, делим его на 2×5 и 3×5. Спрашиваем про 2×5. В зависимости от второго ответа, получим прямоугольник, размером не более 3×5, содержащий все мины.

3) На следующем шаге получим прямоугольник размером не более 3×3,

4) на 4-м шаге получим прямоугольник не более 2×3 и на 5-м шаге получим искомый прямоугольник.

Решение 2.

Раскрасим доску в 4 цвета.

1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1

На каждом цвете стоит ровно одна мина. За 3 вопроса можно найти мину на клетке 4-го цвета. Таких клеток 8.

1) Делим клетки 4-го цвета на две группы по 4 клетки, спрашиваем про одну из них.

2) Делим подозрительную четвертку на две группы по 2 клетки.

3) Делим подозрительную пару на две группы по 1 клетке.

Нашли одну бомбу в клетке 4-го цвета.

Заметим, что если найти бомбу в клетке 1-го цвета, то квадрат однозначно будет найден. Есть 4 клетки 1-го цвета под подозрением. За два вопроса найдем ту, что с бомбой.

4) Делим подозрительную четвертку на две группы по 2 клетки.

5) Делим подозрительную пару на две группы по 1 клетке.

Нашли бомбу в клетке 1-го цвета.

Квадрат однозначно найден

Возможны и другие алгоритмы нахождения всех заминированных клеток за 5 измерений.

II. Докажем, что за 4 измерения и меньше выполнить задание нельзя.

1) Заметим, что в прямоугольнике 5×9 можно разместить 32 различных квадрата 2×2.

2) Назовем множеством «подозрительных» квадратов 2×2 при данном измерении – множество квадратов, включающих клетки, которые были среди тех, на которых загорелась лампочка. Докажем, что за первое измерение *наверняка* выделить множество "подозрительных" из менее чем 16 квадратов 2×2 нельзя.

Действительно образуем множество из некоторого количества клеток и включим прибор.

2а) Если лампочка загорится, то заминированная клетка в этом множестве. Получим некоторое множество "подозрительных" квадратов.

2б) Если лампочка не загорится, то заминированная клетка не в этом множестве, а в множестве, дополняющим его. Среди всех квадратов выберем те, в которые могут входить клетки этого множества – дополнения. То есть тоже получим некоторое множество "подозрительных" квадратов.

Понятно, что в одном из этих множеств "подозрительных" квадратов может быть не менее 16.

3) Докажем, что еще за одно (второе) измерение *наверняка* выделить множество из менее чем 8 квадратов 2×2 нельзя.

3а) Если лампочка загорится, то заминированная клетка в этом множестве. Получим некоторое множество "подозрительных" квадратов.

3б) Если лампочка не загорится, то заминированная клетка не в этом множестве, а в множестве, дополняющем его. Среди всех квадратов выберем те, в которые могут входить клетки этого множества – дополнения. То есть тоже получим некоторое множество "подозрительных" квадратов.

Понятно, что в одном из этих множеств "подозрительных" квадратов может быть не менее 8.

4) Рассуждая аналогично, докажем, что за одно (третье) измерение *наверняка* выделить множество из менее чем 4 квадратов 2×2 нельзя.

5) Рассуждая аналогично, докажем, что за одно (третье) измерение *наверняка* выделить множество из менее чем 2 квадратов 2×2 нельзя.

Таким образом, за 4 измерения найти мину невозможно, так как множество «подозрительных» квадратов содержит хотя бы два «подозрительных» квадрата, не различимых между собой.

Комментарии Жюри:

- Верный алгоритм за более 5 измерений — 0 баллов
- Приведен верный алгоритм за 5 измерений — +4 балла
- Доказано, что меньше 5 измерений нельзя — +6 баллов
- Верная идея доказательства, не доведенная до конца — от 1 до 3 баллов