Зимний тур XXXI Турнира Архимеда

Условия и решения задач

Задача 1.1. (4 балла) На экране высвечено число 48. При нажатии кнопки все цифры числа перемножаются, к результату прибавляется 27, полученное число высвечивается на экране (предыдущее число стирается). Кнопку нажали 2022 раза. Какое число теперь на экране?

Ответ: 27.

Решение (от детей не требовалось):

Проследим изменения чисел после первых нажатий на кнопку:

$48 \rightarrow$ после 1-го нажатия получим $4 \cdot 8 + 27 = 32 + 27 = 59$

$59 \rightarrow$ после 2-го нажатия получим $5 \cdot 9 + 27 = 45 + 27 = 72$

$72 \rightarrow$ после 3-го нажатия получим $7 \cdot 2 + 27 = 14 + 27 = 41$

$41 \rightarrow$ после 4-го нажатия получим $4 \cdot 1 + 27 = 4 + 27 = 31$

$31 \rightarrow$ после 5-го нажатия получим $3 \cdot 1 + 27 = 3 + 27 = 30$

$30 \rightarrow$ после 6-го нажатия получим $3 \cdot 0 + 27 = 0 + 27 = 27$

$27 \rightarrow$ после 7-го нажатия получим $2 \cdot 7 + 27 = 14 + 27 = 41$

$41 \rightarrow$

…

Видим, что число 41 появилось во второй раз, значит, дальше числа будут повторяться периодически.

На экране, таким образом, последовательно будут появляются числа:

48 59 72 (41 31 30 27) (41 31 30 27) и т. д.

Заметим, что, начиная с третьего нажатия на кнопку, мы получим на экране период из четырех чисел: 41, 31, 30, 27. Он выделен скобками.

Перед периодом стоят три числа. Если их отбросить, то в оставшейся периодической последовательности с периодом 4 нас интересует 2020-е число. Т.к. 2020 делится на 4, то это последнее число периода, т. е. 27.

Комментарии Жюри:

- Верный ответ — 4 балла
- В ответе написано одно из чисел периода, но не 27 (41, 31 или 30) — 1 балл

Задача 1.2. (2+5 баллов) На клетчатой бумаге нарисованы схемы лабиринтов (рис 1,2). Шарик может двигаться по лабиринту в одном из четырёх направлений с постоянной скоростью (вправо, влево, вверх и вниз, начальное направление показано стрелочкой). При столкновении с барьером шарик отражается от него, меняя направление движения на 90°. Барьер после удара шарика поворачивается на 90° относительно своего центра. Если шарик касается внешней стенки лабиринта, он останавливается.

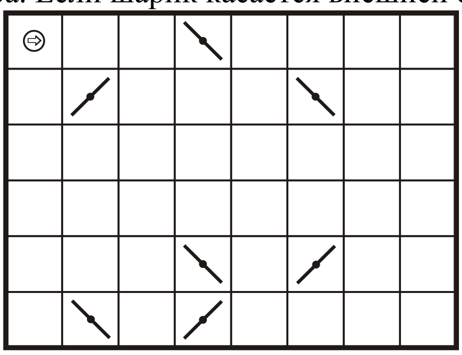


Рис.1

Рис.2

а) В лабиринте движется один шарик. На рис. 1 изображено начальное состояние лабиринта. Изобразите конечное состояние лабиринта.

б) В лабиринте одновременно начинают двигаться два шарика. При столкновении шариков направления их движений меняются на противоположные. На рис. 2 изображено начальное состояние лабиринта. Изобразите конечное состояние лабиринта (начальные скорости шариков одинаковые, после любых столкновений скорости не меняются).

Ответы: а) см. рис.1, б) см. рис.2.

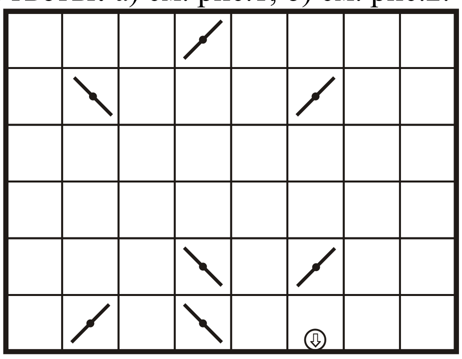


Рис.1

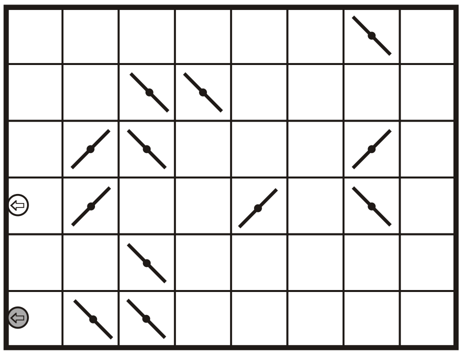
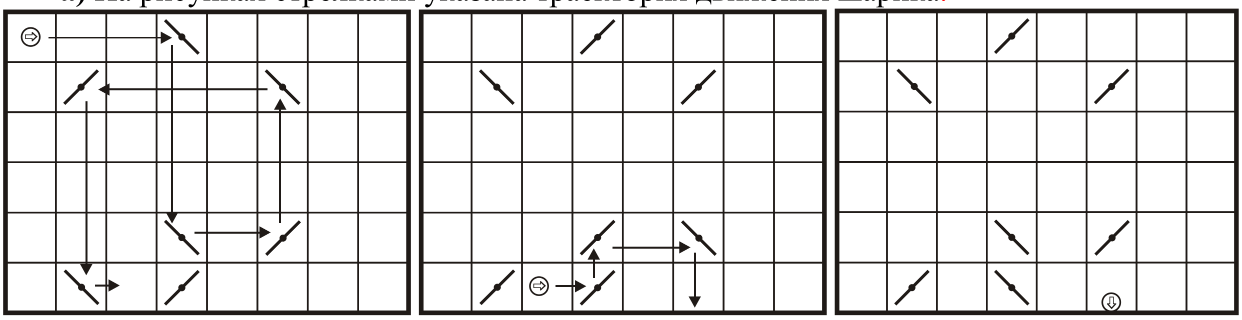


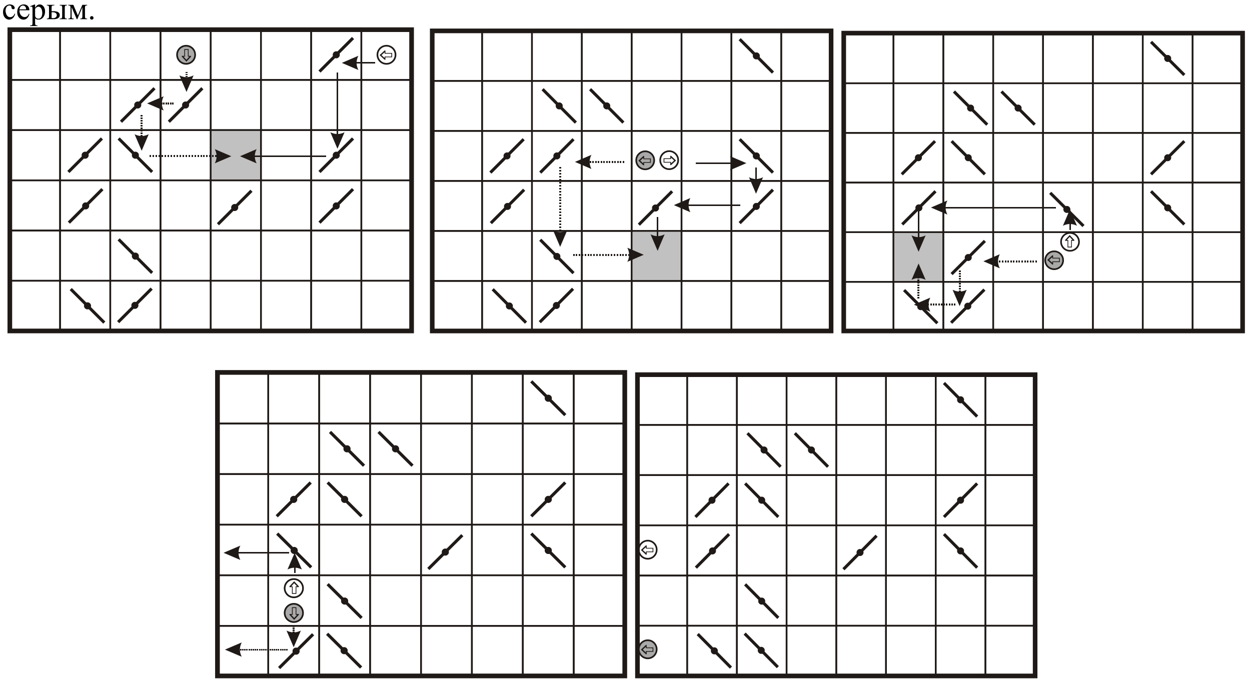
Рис.2

Решение (от детей не требовалось):

а) На рисунках стрелками указана траектория движения шарика.



б) На рисунках стрелками указаны траектории движения шариков и положения шариков и барьеров после каждого столкновения. Клетки, где они сталкиваются выделены серым.



Комментарии Жюри:

а) верное конечное положения шарика — +1 балл

- верное конечное положение всех барьеров — +1 балл
- Верный рисунок в пункте а) — 1+1 = 2 балла

б) верное конечное положение для одного из двух шариков — +1 балл

- верное конечное положение для обоих шариков — +2 балла (т.е. в сумме 3 балла за два шарика)
- верное конечное положение всех барьеров — +2 балла
- при верном положении всех барьеров без указания конечного положения для шариков — 4 балла
- Верный рисунок в пункте б) — 5 баллов
- Верные рисунки в обоих пунктах — 7 баллов
- **Указание или не указание стрелки на шариках, а также цвет шариков в конечном положении лабиринта на оценку не влияет.**

Задача 1.3. (6 баллов) Палиндром. Найдите какое-нибудь натуральное число, кратное 2^{14} (произведение четырнадцати двоек, $2^{14}=128^2$) и читаемое одинаково слева направо и справа налево.

Ответ: например, 4836100000000016384

Существуют и другие ответы.

Решение (от детей не требовалось):

Заметим, что $2^{14}=128^2=16384$.

Запишем число 2^{14} справа налево (оно ведь не оканчивается нулём) и назовём его $x=48361$. Так как 10^{14} делится на 2^{14}, то и $x\cdot 10^{14}$ делится на 2^{14}. А значит, число $x\cdot 10^{14}+2^{14}$ тоже делится на 2^{14}, и к тому же оно палиндром.

Итак, один из возможных ответов 4836100000000016384.

Замечание 1. Если количество нулей внутри числа увеличить на сколько угодно цифр, тоже будет верный ответ.

Замечание 2. Если проделать похожую процедуру, стартовав с любой степени 2 с показателем, большим 14, тоже получится верный ответ.

Замечание 3. Наименьшим числом, обладающим требуемым свойством, является 8634368, т. е. $2^{14}\cdot 527$.

Замечание 4. Возможно множество других ответов, например,
48361483614836116384163841638416384, 401723110172313271011327104,
63556635566355665536655366553665536, 675840167584010485761048576,
$291848192=2^{14}\cdot 17813$, $677707776=2^{14}\cdot 41364$, $886898688=2^{14}\cdot 54132$ и др.

Комментарии Жюри:

- Верный ответ — 6 баллов

Задача 1.4. (6 баллов) На нескольких карточках Вася написал цифру, а на обороте — букву (если цифры равны, то буквы одинаковы, если цифры различны, то буквы различны). Вася выкладывает из карточек слово, и вычисляет сумму (или произведение) записанных на них цифр. Если выложить слово ЛОМ, то сумма равна 5, слово МОЛВА – сумма 21, слово ВОЛ – сумма 13, слово ВИНА – сумма 29. Какая сумма может получиться, если выложено слово ЛИАНА? Какое произведение может получиться, если выложено слово МИНА? Укажите все ответы.

Ответ: сумма цифр в слове ЛИАНА – 31 или 27. Произведение цифр в слове МИНА – 280.

Решение 1 (от детей не требовалось):

Так как ЛОМ=5, то это могли быть только цифры 0+1+4 или 0+2+3, но их порядок не ясен.

МОЛВА=21. Здесь есть ЛОМ и еще ВА. Так как ЛОМ=5, то ВА=16. Это могут быть только цифры 9+7.

Тогда ВОЛ=13 это сумма 9 или 7 + ОЛ (часть слова ЛОМ). Но если В=7, то ОЛ=6, что невозможно (суммы цифр 0, 1, 4 или 0, 2, 3 не дают 6). Следовательно, В=9, А=7, ОЛ=4=0+4. Тогда М=1.

Так как ВА=9+7=16, то из слова ВИНА=29 мы получаем ИН=13=8+5 (суммы цифр 9+4 и 7+6 быть не могут, так как цифры 9, 4, 7 соответствуют другим буквам).

Таким образом, ЛИАНА = ЛАА+ИН = 4 + 7 + 7 + 13 = 31 или 0 + 7 + 7 + 13 = 27.

Теперь рассмотрим слово МИНА. М=1, ИН=8+5, А=7. Значит, произведение цифр в слове МИНА= 280.

Решение 2 (от детей не требовалось):

Т. к. М+О+Л+В+А=21, а Л+О+М=5, то В+А=16.

Т. к. В+И+Н+А=29, а В+А=16, то И+Н=13.

Из того, что В+О+Л=13 и Л+О+М=5, следует, что В–М=8.

Это возможно лишь в двух случаях: (а) В=8, М=0, (б) В=9, М=1.

(а) Если В=8, то из В+А=16 следует, что А=8, а это невозможно.

(б) Если В=9, М=1, то из В+А=16 имеем А=7, а из Л+О+М=5 имеем Л+О=4.

С учётом всего имеющегося Л+О=4 значит, что одна из букв Л или О равна 4.

Посмотрим, какой может быть пара букв И и Н, исходя из И+Н=13, и не возникает ли при этом противоречия.

Если это 9 и 4, то противоречие с В=9.

Если это 7 и 6, то противоречие с А=7.

Если это 8 и 5, то противоречия нет.

Таким образом, ситуация И+Н=13 возможна.

Теперь легко понять, какие могут быть ответы.

Если Л=0, то Л+И+А+Н+А=27.

Если Л=4, то Л+И+А+Н+А=31.

Во всех случаях М·И·Н·А=280.

Комментарии Жюри:

- Правильный ответ: а) 27 или 31; б) 280 — 6 баллов (всего).
- Частично правильный ответ: за каждое верное число в ответе — 2 балла
- (т.е. всего: $2+2+2=6$ баллов).
- *За неверные ответы было принято решение баллы не снижать.*

Задача 2.1. (6 баллов) На клетчатой доске 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 − не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.

Ответ: нет.

Решение 1.

1) От противного. Предположим разбиение получилось. Разобьём доску как показано на рис. 1. В каждом из выделенных квадратов 3×3 окажется ровно 4 крестика. Итого: ровно 24 крестика, значит, вся нижняя полоса 1×9 пуста. Аналогично можно доказать, что пуста и верхняя полоса 1×9 пуста.

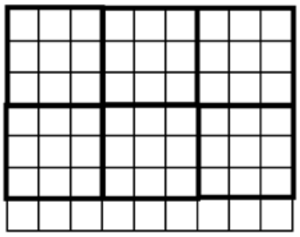


Рис. 1

2) Заметим, что условие «в любом квадрате 5×5 не менее 14 пустых клеток» равносильно условию «в любом квадрате 5×5 стоит не более 11 крестиков».

Разобьём оставшуюся (белую) часть на квадрат 5×5 и прямоугольник 5×4 (рис 2).

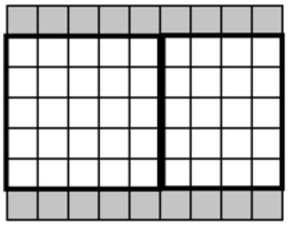


Рис. 2

Тогда в квадрате стоит не более 11 крестиков, и в прямоугольнике стоит не более 11 крестиков, значит, в белой области не более 22 крестиков. Но их там 24, так как пункте 1 доказано, что все серые клетки пусты. Противоречие.

Решение 2.

Из рис.1 ясно, что все 24 крестика должны располагаться в жёлтых клетках, а значит все белые клетки должны быть пустыми.

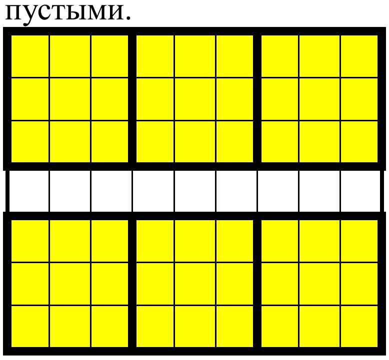


Рис. 1

На рис. 2 среди зелёных клеток ровно 2 пустые и среди синих клеток ровно 2 пустые, значит, среди жёлтых и серых клеток вместе не менее $14-2-2-5=5$ пустых. Отсюда следует, что либо среди жёлтых, либо среди серых клеток не менее 3 пустых. Предположим, что среди серых и рассмотрим выделенный квадрат 3×3 на рис 3.

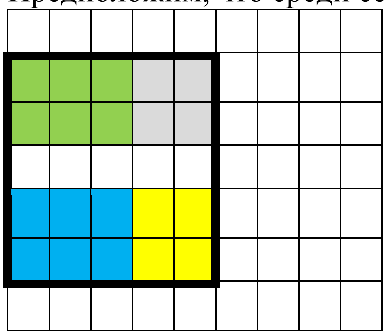


Рис. 2

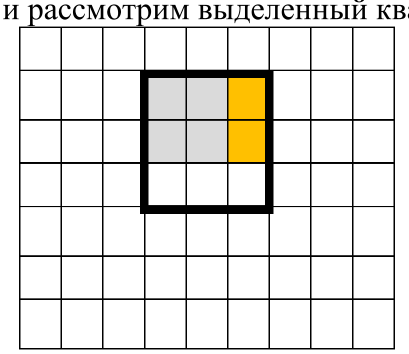


Рис. 3

Три белые клетки в нём пустые, среди серых клеток не менее трёх пустых, значит, пустых клеток не менее 6. Противоречие с тем, что в этом квадрате расположено 4 крестика.

Комментарии Жюри:

- Правильный ответ (без обоснования) — 0 баллов.
- Показано, что в полоске крестиков нет (крайней или серединной) — 1 балл
- Наличие верного ответа и идеи решения (от противного, разбиение на квадраты 3×3 и 5×5), но не доведённой до конца – по любой причине — 3 балла.
- Полное решение — 6 баллов.

Задача 2.2. (7 баллов) В замке живут Рыцари и Лжецы. Рыцари всегда говорят правду, Лжецы всегда лгут. Известно, что все жители разного возраста и количество золотых монет у всех разное. Каждый житель замка высказал два утверждения: 1) "*Нет трёх жителей старше меня*", 2) "*Хотя бы у пяти жителей больше золотых монет, чем у меня*". Могло ли это быть? Если да, сколько жителей могло быть в замке (укажите все ответы)?

Ответ: 8 жителей (3 Рыцаря, 5 Лжецов).

Решение:

(а) В замке есть хотя бы один житель, значит, есть самый старший житель.

(б) Из высказывания 1) заключаем, что самый старший житель может быть только Рыцарем. Из его высказывания 2) заключаем, что кроме него в замке есть ещё не менее пяти жителей, т. е. жителей в замке не менее шести.

(в) Оценим число Рыцарей с помощью первого утверждения.

Если Рыцарей более трёх, то самый молодой из них должен солгать. Противоречие.

Если Рыцарей менее трёх, то среди трёх самых старых жителей замка найдётся Лжец, и он скажет правду. Противоречие.

Значит, Рыцарей может быть только ровно 3.

(г) Оценим число Лжецов с помощью второго утверждения.

Если Лжецов более пяти, то самый бедный скажет правду. Противоречие.

Если Лжецов менее пяти, то среди пяти самых богатых жителей замка окажется хотя бы один Рыцарь, и он солжёт. Противоречие.

Значит, Лжецов ровно 5.

(д) Таким образом, жителей замка может быть только 8.

(е) Убедимся, что описанная в задаче ситуация возможна.

Упорядочим жителей замка по возрасту: Р>Р>Р>Л>Л>Л>Л>Л.

Упорядочим жителей замка по числу золотых монет: Р<Р<Р<Л<Л<Л<Л<Л.

Действительно, Рыцари говорят правду, а Лжецы лгут.

Комментарии Жюри:

- Верный ответ: 1 балл
- Верно установлено число Рыцарей из первого высказывания:
  – с обоснованием +2 балла
  – без обоснования +1 балл
- Верно установлено число Лжецов из второго высказывания:
  – с обоснованием +2 балла
  – без обоснования +1 балл
- Приведён пример: +2 балла
- При полном правильном решении: 1+2+2+2=7 баллов

Задача 2.3. (8 баллов) Домики Винни-Пуха (ВП), Пятачка (П) и Кролика (К) стоят на берегу круглого озера, вокруг которого проложена тропа. В понедельник П вышел из дома в 10:00, а ВП в 10:40. Друзья пошли в гости к К и добрались до места в 12:00 (при этом мимо домов друг друга они не проходили). На следующий день ВП вышел в 10:00, а П в 10:20 и пошли они в направлениях, противоположных тем, которые были у них в понедельник. Во вторник ВП и П встретились у домика К в 12:00. Встречались ли они пока шли по тропе? Скорости ВП и П не обязательно равны между собой, но одни и те же во все дни. Обоснуйте Ваш ответ.

Ответ: Нет, они не успеют встретиться.

Решение 1.

Путь по окружности в одну сторону (до дома Кролика) занимает у Винни-Пуха 80 минут, в другую – 120 минут. Время, затраченное Винни-Пухом в понедельник, относится к времени, затраченному во вторник, как 2:3. Следовательно, путь вокруг озера можно разделить на 5 частей, из которых путь в понедельник состоит из 2 частей, а во вторник из 3 частей.

Путь в одну сторону до домика Кролика занимает у Пятачка 120 минут, в другую 100 минут. Так как времена, затраченные Пятачком в обе стороны, соотносятся, как 6:5, то можно разделить весь его путь вокруг озера на 11 частей, из которых в одну сторону путь состоит из 6 частей, в другую из 5 частей.

Теперь разделим всю тропу вокруг озера на 55 частей (НОК для 11 и 5). Тогда в понедельник расстояние от домика Кролика до домика Винни-Пуха составляет 22 части тропы, а от дома Пятачка до домика Кролика 30 частей. То есть расстояние между домиками Винни-Пуха и Пятачка составляет 3 части всей тропы.

Во вторник Винни-Пух вышел в 10.00, а Пятачок в 10.20. За это время (20 минут) Винни-Пух прошёл более 3 частей (за 80 минут он проходит 22 части, а за 20 минут 5,5 частей, что больше 3), т. е. он прошёл мимо домика Пятачка, когда тот **ещё из него не вышел**. Следовательно, они не успели встретиться, пока шли по тропе до домика Кролика.

Решение 2.

Пусть длина пути от домика П до домика К (не проходящего мимо домика ВП) равна x, длина пути от домика ВП до домика К (не проходящего мимо домика П) равна y, а длина пути от домика П до домика ВП (не проходящего мимо домика К) равна z.

В понедельник за 2 часа П прошёл расстояние x, а во вторник за 2 часа ВП прошёл расстояние $x+z$, значит, скорость ВП больше скорости П.

В понедельник за 1 час 20 мин ВП прошёл расстояние y, значит, П для прохождения расстояния y понадобится больше, чем 1 час 20 мин. Но известно, что во вторник за 1 час 40 мин П прошёл расстояние $y+z$. Отсюда следует, что П проходит расстояние z быстрее, чем за 20 мин. Значит, ВП, скорость которого больше, тем более пройдёт расстояние z быстрее, чем за 20 мин, и тем самым во вторник ВП пройдёт мимо домика П раньше, чем П из него выйдет, и они не встретятся.

Комментарии Жюри:

- Только верный ответ без обоснования: 0 баллов
- Верный ответ с утверждением, что Винни-Пух пройдёт домик Пятачка раньше, чем тот выйдет из него, но без обоснования: 2 балла
- Верный ответ с правильной идеей, но в решении вычислительная ошибка: 5 баллов
- «Частный случай» протяженности тропы: 7 баллов
- Полное верное решение: 8 баллов

Задача 2.4. (8 баллов) В кладовой Царя Гороха (ЦГ) лежат 2007 мешков с монетами, в каждом из них — ровно 2022 монеты. Мешки пронумерованы различными числами от 1 до 2007. ЦГ выбирает один из мешков и перекладывает из него по одной монете в мешки с номерами большими, чем у выбранного. Иван Царевич (ИЦ) имеет право указать номера нескольких мешков, а ЦГ сообщает, ему, сколько всего монет оказалось в указанных мешках после перекладывания (в сумме!). Сможет ли ИЦ определить номер выбранного ЦГ мешка? Если да, объясните как. Если нет, объясните почему.

Ответ: сможет.

Решение 1 (краткое).

ИЦ выбирает все нечётные мешки.

Сумма всех монет в них до того, как ЦГ выбрал мешок с номером N и переложил из него монеты, будет равна $1004 \cdot 2022$ монет.

Понятно, что после того, как ЦГ выбрал мешок, эта сумма изменится. Если он выбрал мешок с нечётным номером, то часть монет из него "ушло" в мешки с чётными номерами, и она уменьшится.

Если же ЦГ выбрал мешок с чётным номером, то, наоборот, в мешки с нечётными номерами пришли монеты из нечётного мешка и эта сумма увеличится.

1) если сумма не изменилась – выбран мешок с 2007 номером.

2) если сумма увеличилась на N (т. е. равна $1004 \cdot 2022 + N$), то искомый мешок имеет чётный номер, равный $2008 - 2N$; если же сумма уменьшилась на N (т. е. равна $1004 \cdot 2022 - N$), то мешок имеет нечётный номер, равный $2007 - 2N$;

Решение 2 (чуть длиннее):

Пусть ИЦ указал все мешки с нечётными номерами.

Покажем, как ИЦ сможет определить номер выбранного ЦГ мешка после получения от ЦГ ответа.

До того, как ЦГ выбрал мешок и переложил из него монеты, общее количество монет в мешках с нечётными номерами было равно $x = 1004 \cdot 2022$.

Выясним, как могло измениться это количество после того, как ЦГ выбрал мешок и переложил монеты.

Если ЦГ выбрал мешок с номером 2007, то монеты не перекладывались и это количество не изменилось.

Если ЦГ выбрал мешок с нечётным номером, меньшим 2007, то часть монет из него «ушла» в мешки с чётными номерами, и x уменьшилось.

Если же ЦГ выбрал мешок с чётным номером, то наоборот, в мешки с нечётными номерами «пришли» монеты из мешка с чётным номером, и x увеличилось.

Если x станет больше на N (т. е. равным $1004 \cdot 2022 + N$), то искомый мешок имеет чётный номер, равный $2008 - 2N$; если же x станет меньше на N (т. е. равным $1004 \cdot 2022 - N$), то мешок имеет нечётный номер, равный $2007 - 2N$.

Замечание. Могут быть предложены другие стратегии, например, ИЦ указал все мешки с чётными номерами, или что-то другое

Комментарии Жюри:

- Только верный ответ без обоснования: 0 баллов
- Полное решение: 8 баллов
- При правильном ответе и решении не рассмотрен случай выбора мешка с номером 2007: снимается 1 балл, и тем самым 7 баллов
- Правильный ответ («может»). Решение содержит выбор множества всех чётных (всех нечётных), но в решении содержатся вычислительные ошибки (например, вычитает N, а не 2N, или записано 2006, а не 2008 для чётных): 4 балла