Зимний тур XXX Турнира Архимеда
Условия и решения задач

Задача 1 (4 балла). На столе «касса цифр» (набор бумажных карточек с цифрами). Маша выложила из карточек четырёхзначное число. Толя заменил в числе все карточки на другие: каждую цифру либо уменьшил на 4, либо увеличил на 1. Число уменьшилось в 4 раза. Какое число могла выложить Маша? Что могло получиться у Толи? (Найдите как можно больше вариантов ответов).

Ответ: (5252, 1313) или (5852, 1463)

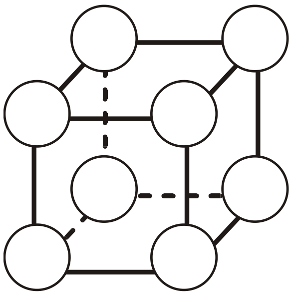
Решение детям воспроизводить не требовалось.

Комментарий Жюри:

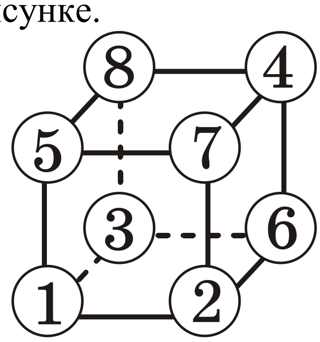
1. За каждый верный пример ставилось 2 балла.

2. За неверные примеры баллы не снижались.

Задача 2 (4 балла). Расставьте цифры от 1 до 8 по одной в вершинах куба таким образом, чтобы для каждой из шести граней суммы четырёх чисел, стоящих в вершинах этой грани, были различны.



Ответ: Например, как на рисунке.



Легко убедиться, что

$1+2+3+6<1+2+5+7<1+3+5+8<2+4+7+6<3+4+6+8<4+5+7+8$.

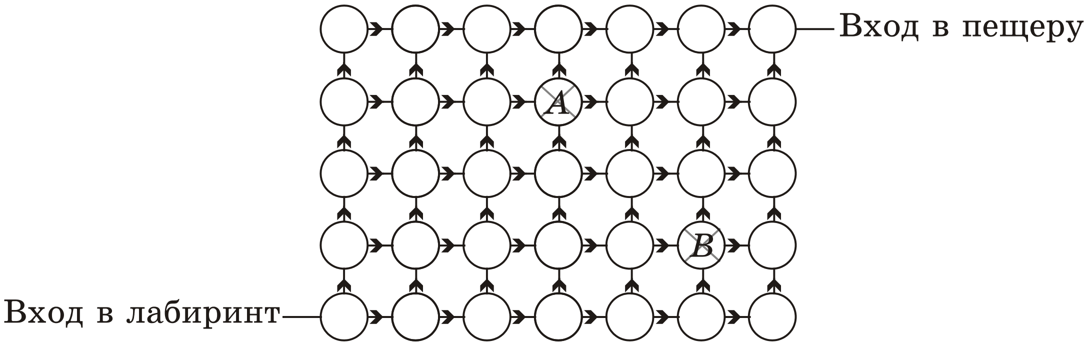
Возможны и другие многочисленные расстановки цифр.

Комментарий Жюри:

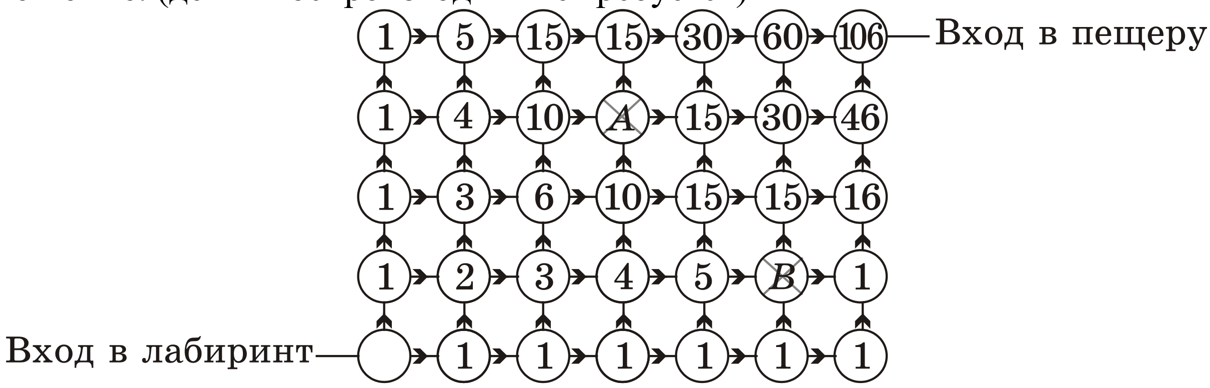
1. Оценивался только верный пример.

2. За неверные примеры баллы не снижались. Наиболее типичными ошибками были две грани с одинаковой суммой цифр (например, с суммой 18).

Задача 3 (4 балла). Али-баба на пути к пещере с сокровищами проходит через лабиринт (схема лабиринта – на рисунке). Лабиринт состоит из одинаковых комнат (на схеме – кружочки) и коридоров между ними. Из каждой комнаты можно выходить в двух направлениях (на схеме – направо или вверх). Две комнаты (A и B) для прохода закрыты. Сколько различных путей ведут в пещеру с сокровищами?



Ответ: 106.
Решение. (детям воспроизводить не требуется)

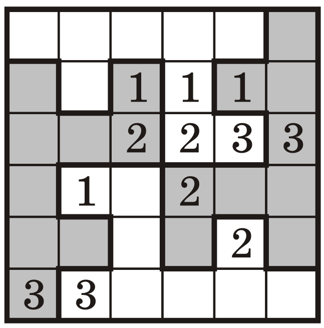


Комментарий Жюри:
Оценивался только верный ответ.

Задача 4 (6 баллов). Разделите квадрат на 4 равные части так, чтобы в каждой из них сумма чисел была одинаковой.

		1	1	1	
		2	2	3	3
	1		2		
				2	
3	3				

Решение: См. рис.



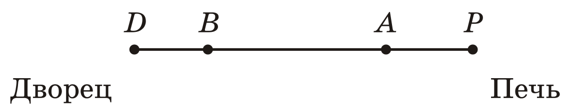
Комментарий Жюри:
1. Оценивался только верный пример (он единственный).
2. За неверные примеры баллы не снижались.

Задача 5 (6 баллов). Емеля устроился на работу царским хлебопёком. Как-то утром отправился он на царёву службу. Выехал он поздновато, поэтому печь пекла пироги прямо на ходу. Одновременно с Емелей навстречу ему отправились два посыльных: Фёдор и Иван. Фёдор идёт пешком, поэтому движется в 3 раза медленнее печи, а Иван – верхом на лошади – в 4 раза быстрее, чем печь. При встрече с посыльными Емеля (на ходу) отдаёт им все изготовленные к этому моменту пироги, а сам продолжает движение. Известно, что Фёдор получил на 133 пирога больше, чем Иван, а встречи с посыльными состоялись как раз в тот момент, когда он доставал из печи очередной пирог. Сколько всего пирогов испекла печь по пути на царёву службу? Печь начала работать с момента отправления и печёт пироги равномерно.

Ответ: 380 пирогов.

Решение:

Скорость Ивана в 4 раза больше скорости печи, поэтому до места встречи с Иваном (*A*) печь проедет $\frac{1}{5}$ пути. Скорость Федора в 3 раза меньше скорости печи, значит до места встречи (*B*) Федор пройдет $\frac{1}{4}$ пути, а печь – $\frac{3}{4}$ пути. Длина отрезка *AB* составляет $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{11}{20}$ пути.



Иван получил столько пирогов, сколько печь испекла за $\frac{1}{5}$ пути, а Федор – сколько печь испекла за $\frac{11}{20}$ пути. Второе расстояние (*AB*, до встречи с Федором) больше первого (*AP*, до встречи с Иваном) на $\frac{11}{20}-\frac{1}{5}=\frac{7}{20}$ пути. Значит разность между количествами полученных пирогов – 133 пирога – печь испекла за $\frac{7}{20}$ пути. Значит за весь путь печь испекла $\frac{133\cdot 20}{7}=380$ пирогов.

Можно решать и без использования дробей. До места встречи с Иваном (*A*) печь проедет одну часть, а Иван – в 4 раза больше – 4 части. Т.е. весь путь можно разделить на 5 частей. С другой стороны, до места встречи (*B*) Федор пройдет одну (другую по длине) часть пути, а печь – в 3 раза больше – 3 такие другие части. Значит весь путь также можно поделить и на 4 другие части.

Тогда удобно разделить весь путь на 20 "удобных" единиц (у.е). Иван получит пироги, испеченные за 4 у.е. А Федор – за 11 у.е. Тогда ясно, что Федор получил настолько больше пирогов, насколько путь печи до встречи с ним был больше. Т.е. за 7 у.е. испекла 133 пирога. Значит за 1 у.е. печь печет 19 пирогов, а за весь путь из 20 у.е. – 380 пирогов.

Комментарии Жюри:

1. За только верный ответ без обоснования ставился 1 балл

2. При верном ходе решения допущены арифметические ошибки в конце решения – 4-5 баллов.

Задача 6 (7 баллов). За круглым столом сидели 13 гостей. Среди них были рыцари (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и марсиане. Про марсиан известно, что правду они говорят только марсианам, а всем остальным лгут. Каждые двое сидящих рядом сказали друг другу: «Ты не рыцарь». Сколько лжецов могло сидеть за столом, если известно, что их было больше, чем марсиан? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Ответ: 4 или 5.

Решение 1.

Если двигаться вдоль стола (в любом заранее выбранном направлении), то после лжеца может сидеть только рыцарь, после рыцаря – только лжец или марсианин, а после марсианина – только рыцарь или марсианин.

Таким образом, всех гостей можно разбить на блоки: РЛ и РМ…М (n марсиан, $n = 1, 2, 3, \ldots$), после каждого из которых идёт ещё какой-то блок из этого же списка. Поскольку общее количество гостей нечётное, то обязательно имеется нечётное количество блоков второго типа с чётными n.

Три или более таких блоков быть не может, т.к. тогда в них будет не менее 9 гостей, из которых не менее 6 марсиан, а значит, лжецов должно быть больше 6, и общая сумма оказывается больше 13.

Итак, блок второго типа с чётным n единственный.

Если $n = 2$, то среди оставшихся 10 гостей лжецов не более половины, т.е. не более 5 (т.к. лжец может входить в эту десятку только в блоке РЛ), но лжецов также не менее трёх (т.к. два марсианина уже есть, а лжецов больше, чем марсиан).

Если лжецов 3, то марсиан среди 10 гостей, о которых идёт речь, быть уже не может, и тогда среди этой десятки 7 рыцарей, что невозможно – два рыцаря рядом сидеть не могут.

Пример РММРЛРЛРЛРЛРМ показывает, что лжецов может быть 4.

Пример РММРЛРЛРЛРЛРЛ показывает, что лжецов может быть 5.

Если $n = 4$, то среди оставшихся 8 гостей лжецов 5 или более (ведь их больше, чем марсиан). Это невозможно, т.к. лжец может входить в эту восьмёрку только в блоке РЛ.

Тем более невозможен случай $n \geq 6$

Решение 2.

Предположим, что за столом сидело 6 лжецов. Тогда, так как рядом с лжецами сидят рыцари, то за столом будет не менее 7 рыцарей (и значит 2 рыцаря окажутся рядом, и вдобавок число марсиан будет равно 0). Значит 6 рыцарей быть не может.

Примеры, когда лжецов 5 или 4 приведены в первом решении.

Предположим, что за столом 3 лжеца. Тогда за столом не более 2 марсиан. Значит рыцарей должно быть не менее $13 - 3 - 2 = 8$. 8 рыцарей (и тем более большее число) не получится рассадить требуемым образом, так как какие-то два рыцаря окажутся сидящими рядом.

Комментарий Жюри:

Возможны решения на основе перебора случаев или отдельной оценки числа каждого из вида гостей. В этом случае баллы ставились только при полном переборе случаев.

За только один из двух верных ответов без обоснования – 0 баллов

Даны без обоснований оба верных ответа – 1 балл

Приведён верный пример, что лжецов может быть 4 — 1 балл

Приведён верный пример, что лжецов может быть 5 — 1 балл
Доказано, что лжецов не более 5 — 1 балл
Доказано, что лжецов не менее 4 — 2 балла
Верные рассуждения про "блоки" — до 2-х баллов

Отметим, что только верные утверждения о том, кто с кем может или не может сидеть рядом – не является еще идеей блоков: блок – фиксированная комбинация, которую можно "безболезненно" включить в круг независимо от других блоков.

Задача 7 (9 баллов). Кощей Бессмертный (КБ) играет в игру. В начале игры он в каждой клетке таблицы 100×100 записывает по одному натуральному числу от 1 до 100^2, так, что все числа в таблице в начале игры – различны. Затем включается искусственный интеллект (ИИ). На первом шаге ИИ одновременно заменяет каждое число в таблице на наибольшее из соседних чисел (соседние – те, которые расположены в клетках с общей стороной). На втором шаге ИИ снова заменяет каждое число в таблице на наибольшее из соседних чисел, и так далее.

а) Может ли КБ расставить числа в начале игры так, чтобы через некоторое время все числа в таблице стали одинаковыми? б) Какое наибольшее количество различных чисел может остаться в таблице через 10 000 ходов? в) Какое наименьшее число может остаться в таблице через 10 000 ходов?

Ответ: а) нет; б) 2; в) 5000.

Решение.

а) и б) Если A – наибольшее число в таблице, то большего числа никогда появиться не может, и после любого хода A будет оставаться наибольшим.

Если раскрасить таблицу в шахматном порядке, то во-первых, после каждого хода все числа, равные A, будут стоять на клетках одного цвета, во-вторых, после каждого хода этот цвет будет меняться на противоположный, а в-третьих, каждая из двух областей, образованных клетками, в которых стоит число A (одна – после чётных ходов, другая – после нечётных), будет с каждым ходом расширяться, пока не достигнет границ таблицы, после чего через некоторое время стабилизируется.

Пусть B – наибольшее из чисел первоначальной таблицы, стоящих на клетках цвета, противоположного цвету первоначального положения числа A.

Всё, сказанное выше, справедливо для числа B. Таким образом, после достаточно большого количества ходов в таблице останутся два числа – A и B.

в) Случай B = 5000 возможен, если первоначально расставить все числа от 1 до 5000 в клетках одного цвета, а остальные числа – в клетках противоположного цвета.

Случай B < 5000 невозможен, т.к. чисел, не превосходящих B, имеется ровно B штук, и их не хватит для расстановки на 5000 клетках одного цвета с B.

Комментарий Жюри:
Обоснование пункта а) – 4 балла
Обоснование пункта б) – 3 балла
Обоснование пункта в) – 2 балла
Только ответ в пунктах а) и б) (оба) – 1 балл
Только ответ в пункте в) – 1 балл
Верная идея про раскраску, но ошибки в вычислениях или неверные утверждения — 2 балла