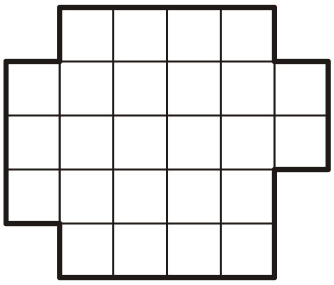
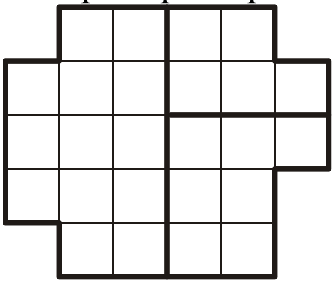
Зимний тур XXVII Турнира Архимеда

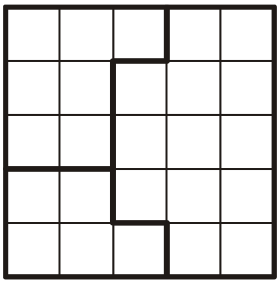
Условия и решения задач



Задача 1 (3 балла). Сложите квадрат. Разрежьте фигуру на рисунке на три части, не являющиеся прямоугольниками, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Линии разреза могут идти только по сторонам клеток. Полученные части можно поворачивать, но нельзя переворачивать.

Решение: Пример см. рис.





Возможны и другие решения

Наиболее типичной ошибкой было при верном разрезании неправильно сложить квадрат, перевернув фигуры.

Задача 2 (4 балла). Кошкин дом. Имеется 12 сосисок длиной 13 см каждая. Их требуется разделить между 13 котятами, 13 кошками и 13 котами так, чтобы каждому котенку достался кусок сосиски длиной 3 см, каждой кошке — кусок сосиски длиной 4 см, а каждому коту кусок сосиски длиной 5 см. Можно ли это сделать? (Сосиску режут поперек).

Ответ: Можно.

Решение:

Режем сосиски следующим образом:

5 сосисок: 4+4+5 – всего 10 кусков сосисок по 4 см и 5 кусков по 5 см;

4 сосиски: 5+5+3 – всего 8 кусков по 5 см и 4 куска по 3 см;

3 сосиски: 4+3+3+3 – всего 3 куска по 4 см и 9 кусков по 3 см.

Итого: всех нужных видов кусков сосисок по 13 штук.

Многие участники ограничивались лишь подсчетом общей длины кусков, не показывая, как можно разрезать сосиски на требуемые целые куски. За такие решения баллы не ставились.

Задача 3 (5 баллов). Утро Бориса. Обычно Борис выезжает на машине на работу в 9:00, а в 9:30 встречает на шоссе маршрутку. Сегодня Борис проспал и выехал на работу в 9:20, но вновь встретил ту же маршрутку. В какое время произошла встреча, если машина Бориса ездит в полтора раза быстрее маршрутки? (Маршрутка ходит по расписанию с постоянной скоростью, на шоссе нигде не останавливается).

Ответ: 1) при движении навстречу друг другу – 9:42

2) при движении в одном направлении – 10:30.

I. Решения для случая движения навстречу друг другу

Решение 1 (арифметическое):

В 9:30 маршрутка находится в обычном месте встречи, а машине Бориса осталось ехать до места обычной встречи 20 минут (т.к. к этому моменту был в пути всего 10 мин). Т.к. скорость машины Бориса в 1,5 раза больше скорости маршрутки, то до встречи Борис проедет 3/5 расстояния между ними, а маршрутка 2/5. Борису потребуется $20 \cdot 3/5 = 12$ минут. Т.е встреча произойдет в 9:42 (9:30+0:12).

Аналогичное решение:

Посмотрим на расстояние между машинами в 9:30. Маршрутка окажется в том месте дороги, где обычно встречает машину Бориса. Борису же до этого места нужно будет ехать еще 20 минут, поскольку он выехал на 20 минут позже. Итак, оставшееся между машинами расстояние Борис может проехать за 20 минут, а маршрутка, скорость которой в полтора раза меньше, за 30 минут. Скорость сближения машин в 2,5 раза больше скорости маршрутки, поэтому машины встретятся через 30:2,5=12 минут, в 9:42.

Решение 2 (алгебраическое):

Представим, что движение маршрутки и машины – движение из пунктов А и Б. Примем скорость маршрутки за x км/мин. Тогда исходное расстояние между ними – $2{,}5x \cdot 30 = 75x$ км. Сегодня за 20 минут маршрутка проехала $20x$ км. Тогда в 9:20 расстояние между ними стало $75x - 20x = 55x$ км. Следовательно, они встретятся через: $55x : 2{,}5x = 22$ мин, т.е. в 9:42.

Решение 3 (геометрическое).

Нарисуем на клетчатой бумаге движение навстречу в обычный день и в день опоздания. Удобно считать, что Борис проезжает 1 клетку в минуту. Тогда на каждые три клетки, пройденные Борисом, маршрутка проедет две. Известно, в какой точке маршрутка бывает в 9:30. Если на этих 30 клетках показать положение Бориса в день опоздания, то видно, что он совпадет с положением маршрутки в 9:42.

II. Решения для случая движения в одну сторону

Решение 1

От дома до места встречи Борис едет 30 минут, тогда Маршрутка едет в 1,5 раза дольше – 45 минут. То есть маршрутка начинает движение в 8.45.

Пусть за 35 минут маршрутка проехала некоторое расстояние x. Т.к. соотношение скоростей 3:2, то и время затраченное на маршрут соотносится как 2:3. Т.е. до места встречи маршрутка ехала $35 \cdot 3 = 105$ минут, а Борис – $35 \cdot 2 = 70$ минут. Таким образом, Борис встретит маршрутку через 70 минут, т.е. в 10.30.

Решение 2

Борис догонял маршрутку за 30 минут. Пусть скорость маршрутки – x. Скорость сближения Бориса и маршрутки – $1{,}5x = x = 0{,}5x$, т.е за 30 минут Борис проезжал расстояние 0,25x. За 20 минут маршрутка проехала $1/3\,x$. Новое расстояние между ними теперь равно $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{7}{12}x$. Это расстояние Борис преодолеет за $\frac{7}{12}x : \frac{1}{2}x = \frac{7}{6}$ ч, т.е. за 1 час 10 минут. Они встретятся в 10.30.

Задача 4 (5 баллов). Военные учения на острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) решили начать с опроса. Для этого 500 человек построили в виде прямоугольника 20×25 (20 человек в поперечном ряду — шеренге, 25 человек в продольном ряду — колонне). В ходе опроса каждый заявил: 1) «Если не считать меня, в моей шеренге рыцарей больше, чем лжецов», 2) «Если не считать меня в моей колонне лжецов больше, чем рыцарей». По этим данным определите, сколько рыцарей в строю.

Ответ: 240.

Решение: Рассмотрим шеренгу и первое утверждение "Среди остальных 19 большинство рыцарей".

1) Если Рыцарей в шеренге нет, то все Лжецы и все лгут, такое могло быть.

2) Если в шеренге есть Рыцарь, то, кроме говорящего, не менее 10 других рыцарей. Тогда любой лжец будет говорить правду, ведь в его ряду не менее 11 Рыцарей из 19 возможных. Значит, Лжецов в такой шеренге нет. Вся шеренга состоит из Рыцарей. Все они говорят правду, и такое могло быть.

Итог: Любая шеренга состоит либо из 20 Рыцарей, либо из 20 Лжецов.

Рассмотрим колонну и второе утверждение "Среди остальных 24 большинство лжецов".

1) Если Лжецов более 13, то любой Лжец говорит правду, ведь среди остальных не менее 13 лжецов из 24 возможных. Значит, Лжецов не более 13.

2) Если Лжецов менее 13, то Рыцари в колонне есть и любой из них солжет, ведь Лжецов менее 13 из 24 возможных. Значит, Лжецов не менее 13.

Следовательно, Лжецов ровно 13 в любой колонне.

Батальон устроен так: каждая шеренга целиком состоит из Рыцарей или Лжецов, причем шеренг с Лжецами будет ровно 13. Тогда всего Лжецов будет $13 \cdot 20 = 260$. Тогда Рыцарей – $20 \cdot 25 - 260 = 240$.

Замечание: Ответ можно получить, основываясь только на пункте 2 условия: «Если не считать меня, в моей колонне лжецов больше, чем рыцарей», не рассматривая пункт 1. В этом случае решение считалось верным и оценивалось полным баллом.

Задача 5 (6 баллов). Весы в Зазеркалье. Из 9 монет одна фальшивая — более легкая. Алисе требуется найти 7 настоящих монет за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь. Возможно ли это? Следует учесть, что весы в Зазеркалье всегда «врут» (то есть показывают неправильное соотношение между грузами на чашках, например, если весы показывают равновесие, на самом деле равновесия нет и какой-то из двух грузов тяжелее).

Ответ: Да.

Решение:

1 взвешивание

Сравним три и три монеты. Последние три отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных фальшивая. Три отложенные монеты – настоящие.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящие монеты.

При любом исходе нашли три настоящие (обозначим АБВ). Осталось 6 подозрительных.

2 взвешивание

Сравним две и две монеты из шести подозрительных. Еще две монеты отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных монет одна – фальшивая. Две отложенные – настоящие.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящие монеты.

При любом исходе нашли еще две настоящие монеты (обозначим ГД). Осталось 4 подозрительные монеты.

3 взвешивание

Сравним две монеты из четырех подозрительных. Еще две монеты отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных фальшивая монета. Две отложенные монеты – настоящие. Найдено 7 настоящих монет.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящая монета. Нашли еще одну настоящую монету. Осталось найти одну из трех оставшихся.

4 взвешивание

Повторим Третье взвешивание для любых двух монет из трех подозрительных. Одну настоящую найдем.

Возможны и другие алгоритмы решения, например, когда первым взвешиванием сравниваем по 4 монеты.

Наиболее типичной ошибкой было утверждение, что если весы не в равновесии, то они точно в равновесии. Отметим, что для каждого взвешивания возможно ровно три положения весов и из видимого положения весов в реальности возможны два других положения, а не какое-то одно.

Задача 6 (5+5 баллов). Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Вход в пещеру откроется, если Али-Баба расставит числа от 1 до 25 в кодовой таблице 5×5 (по одному числу в каждую клеточку) так, чтобы сумма чисел внутри любого «зигзага» из четырех клеток (рис. 1) была кратна 5.

А) Сможет ли он войти?

Б) Изменится ли ответ, если потребовать, чтобы сумма чисел внутри любой «полоски» из четырех клеток (рис. 2) была кратна 5?

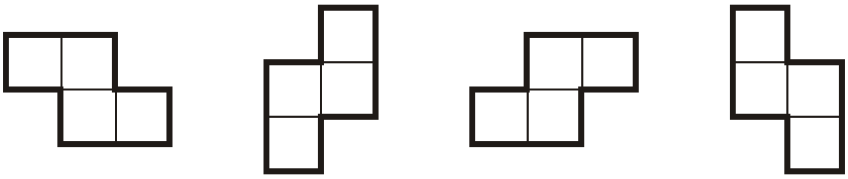


Рис. 1

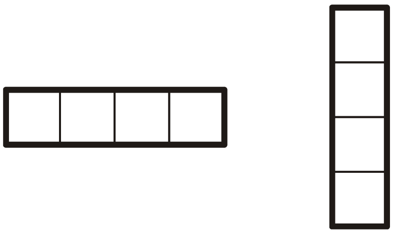


Рис. 2

Ответ: а) нет, не сможет; б) да, изменится.

Решение.

Заметим, что среди чисел от 1 до 25 имеется ровно по 5 чисел, дающих при делении на 5 каждый из возможных остатков:

остаток 1 дают числа 1; 6; 11: 16; 21,

остаток 2 – числа 2; 7; 12; 17; 22,

остаток 3 – числа 3; 8; 13; 18; 23,

остаток 4 – числа 4; 9; 14; 19; 24,

остаток 0 (т.е. делятся на 5 без остатка) числа 5; 10; 15; 20; 25.

А) Решение

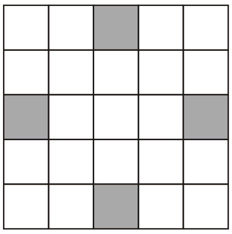
Для фигуры «зигзаг» – можно получить, например, следующим рассуждением. Рассмотрим два «зигзага», имеющих три общие клеточки, например, «зигзаг», в котором стоят числа a, b, c, x, и «зигзаг», в котором стоят числа a, b, c, y.

	x			
	a	b		
		c	y	

			x	
		b	a	
	y	c		

Поскольку суммы $a+b+c+x$ и $a+b+c+y$ делятся на 5, то и разность этих сумм, то есть число $x-y$, тоже делится на 5. Таким образом, разность чисел, стоящих через одно по диагонали, делится на 5 (числа имеют одинаковый остаток при делении на 5).

На рисунке ниже некоторые из таких чисел (т.е. соответствующих клеточек) закрашены. Их четыре.



Но как было отмечено в самом начале решения, чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки, имеется ровно пять. Значит, есть ещё одна клеточка, которая должна быть закрашена. Но тогда, кроме этой клеточки, есть ещё как минимум одна, стоящая от неё через одну по диагонали, и она тоже должна быть закрашена. Таким образом, в квадрате найдётся по меньшей мере шесть чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки. Противоречие.

Б) Решение: См. пример.

10	9	19	22	20
6	4	3	2	1
16	5	21	13	11
18	7	17	8	23
15	14	24	12	25

Остатки при делении на 5:

0	4	4	2	0
1	4	3	2	1
1	0	1	3	1
3	2	2	3	3
0	4	4	2	0

Большинство участников пытались привести примеры не для всего квадрата 5×5, а лишь для отдельного его участка, что не могло быть оценено большим числом баллов