

## Зимний тур XXVI Турнира Архимеда

### Условия и решения задач

**Задача 1 (3 балла). Карточки с числами.** На рисунке расставлены карточки с числами 1, 2, 3, ..., 9 так, что получились четыре неверных равенства (три горизонтальных, одно вертикальное). Переставьте эти карточки так, чтобы все равенства стали верными. Достаточно привести ответ.

$$\boxed{1} - \boxed{2} = \boxed{3}$$

×

$$\boxed{4} : \boxed{5} = \boxed{6}$$

=

$$\boxed{7} + \boxed{8} = \boxed{9}$$

**Ответ:**

$$\boxed{9} - \boxed{5} = \boxed{4}$$

×

$$\boxed{6} : \boxed{3} = \boxed{2}$$

=

$$\boxed{1} + \boxed{7} = \boxed{8}$$

**Задача 2 (4 балла). За полугодие** Федя получил по математике 35 оценок. Перед самым Новым годом все двойки и тройки он пересдал: в электронном журнале двойки были исправлены на тройки, а "старые" тройки – на четвёрки. При этом количество троек осталось прежним, а средний балл вырос на 0,4. Сколько двоек было у Феде первоначально?

**Ответ:** 7 двоек.

**Решение:**

1) Количество троек не изменилось, поэтому можно считать, что двойки исправлены на четверки.

2) Изменение среднего балла – это  $\frac{2n}{35} = 0,4$ , откуда  $2n = 14$ ,  $n = 7$ .

Возможны другие решения.

**Задача 3 (5 баллов). Пес и Лиса.** Между Лисьей норой и Птичьим двором прямая дорога. Лиса направляется на Птичий двор, а откуда одновременно навстречу ей и с той же скоростью выбегает Пес. Пес, почуяв Лису на расстоянии 100 м, побежит за ней с утроенной скоростью. Лиса, почуяв Пса на расстоянии 60 м, побежит от него с удвоенной скоростью. Сможет ли Лиса скрыться в норе, если от Птичьего двора до Лисьей норы 300 м?

**Ответ:** да

**Решение:**

1) Пес почует Лису, когда каждый из них пробежит по 100 м, а расстояние между ними станет 100 м; в этот момент он увеличит скорость втрое.

2) Лиса почует Пса, когда Пес пробежит еще 30 м, а Лиса пробежит 10 м, а расстояние между ними станет 60 м; в этот момент Лиса увеличит скорость вдвое и побежит к норе. Лисе останется бежать до норы 110 м, собаке 170 м.

3) Пес способен бежать в 1,5 раза быстрее Лисы, поэтому, когда Лиса спрячется в норе, то есть пробежит 110 м, собака пробежит  $110 \text{ м} \times 1,5 = 165 \text{ м}$ , поэтому собака Лису не догонит.

**Задача 4 (7 баллов).** На Новогоднем базаре продаются гирлянды из шариков. В каждой гирлянде 201 шарик: некоторые – красные, остальные – зеленые. Шарики волшебные – по команде Дежурного Снеговика они могут менять цвет: красные становятся зелеными, а зеленые – красными. За один раз он может поменять цвет каких-нибудь двух, трёх или четырёх шариков расположенных подряд. За каждое перекрашивание Снеговик берет 1 копейку. Федя утверждает, что рубля ему заведомо хватит на то, чтобы превратить любую гирлянду в одноцветную. Прав ли Федя?

**Ответ:** да.

**Решение:**

Пусть крайний справа шарик - зеленого цвета

1) Покажем, что можно любой набор из четырех шариков перекрасить в зеленый цвет не более чем за 2 хода.

Схема перекрашиваний (красный шарик - 1, зеленый шарик - 0):

1) 0001 $\Rightarrow$ 1111 $\Rightarrow$ 0000;	2) 0010 $\Rightarrow$ 1110 $\Rightarrow$ 0000;	3) 0011 $\Rightarrow$ 0000;
4) 0100 $\Rightarrow$ 0111 $\Rightarrow$ 0000;	5) 0101 $\Rightarrow$ 0011 $\Rightarrow$ 0000;	6) 0110 $\Rightarrow$ 0000;
7) 0111 $\Rightarrow$ 0000;	8) 1000 $\Rightarrow$ 1111 $\Rightarrow$ 0000;	9) 1001 $\Rightarrow$ 1111 $\Rightarrow$ 0000;
10) 1010 $\Rightarrow$ 0110 $\Rightarrow$ 0000;	11) 1011 $\Rightarrow$ 0111 $\Rightarrow$ 0000;	12) 1100 $\Rightarrow$ 0000;
13) 1101 $\Rightarrow$ 1110 $\Rightarrow$ 0000;	14) 1110 $\Rightarrow$ 0000;	15) 1111 $\Rightarrow$ 0000;

2) В каждой четверке мы добиваемся нужного цвета не более, чем за два хода. Четверок - 50. Следовательно, нам хватит рубля.

**Задача 5 (8 баллов).** Кощей Бессмертный испытывает Ивана-царевича. На клетчатой доске  $5 \times 9$  он отметил невидимыми чернилами квадрат  $2 \times 2$ . Ивану разрешается, выбрав несколько клеток, спросить у Кощея, есть ли среди них хотя бы одна отмеченная, на что Кощей обязан ответить правдиво: "да" или "нет". Сможет ли Иван найти отмеченный квадрат, задав не более 5 вопросов?

**Ответ:** может.

**Первое решение:**

1) Отметим клетки цифрами.

1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2	4	2
1	3	1	3	1	3	1	3	1

Заметим, что искомые четыре клетки обязательно помечены цифрами 1, 2, 3, 4.

2) Найдем искомую клетку, помеченную цифрой 4. Всего таких клеток 8, одна из них искомая. Найдем ее половинным делением (спросили у Кощея сначала про 4 клетки, а затем про две из отмеченных четырех, а затем про одну из двух).

Таким образом, за три вопроса мы найдем отмеченную клетку с цифрой 4.

Если мы нашли окрашенную клетку с 4 и теперь найдем клетку с 1, то квадрат будет определен однозначно.

3) Рядом с найденной клеткой с 4 расположены четыре клетки с 1.

За два вопроса половинным делением определим нужную клетку. Квадрат однозначно найден.

**Второе решение:**

1) Закрасим первым действием вторую строку исходного квадрата  $5 \times 9$  и узнаем у Кощея, есть среди точек второй строки хотя бы одна точка искомого квадрата  $2 \times 2$ .

Если есть, то искомый квадрат будет находиться в верхней части таблицы  $3 \times 9$ , иначе в нижней части.

X	X	X	X	X	X	X	X	X

X	X	X	X	X	X	X	X	X

2) Закрасим в полученной таблице  $3 \times 9$  четыре первые клетки среднего ряда и спросим у Кощея, есть ли среди них точки искомого квадрата.

Если точки есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы  $3 \times 5$ , иначе в правой части.

X	X	X	X					

X	X	X	X					

3) Закрасим в полученной таблице  $3 \times 5$  две первые клетки среднего ряда и спросим у Кощея есть ли среди них точки искомого квадрата.

Если точки есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы  $3 \times 3$ , иначе в правой части.

X	X			

X	X			

4) Закрасим в полученной таблице  $3 \times 3$  первую клетку среднего ряда и спросим у Кощея есть ли она в искомом квадрате.

Если точка есть, то искомый квадрат будет находиться в левой части таблицы  $3 \times 2$ , иначе в правой части.

X		

X		

5) Закрасим в полученной таблице  $3 \times 2$  верхнюю левую клетку и спросим у Кощея, есть ли она в искомом квадрате.

Если есть, то искомый квадрат будет находиться в верхней части таблицы  $3 \times 2$ , иначе искомый квадрат находится в нижней части.

X	

X	

Возможны и другие решения.

**Задача 6 (6 баллов).** По дороге на олимпиаду. К остановке, где останавливаются автобусы с номерами 164, 171, 258, 285, 365, 367, 377, 577 подошли учитель (он знает номер нужного автобуса), и три его ученика (они его не знают). Учитель предложил поиграть.

Он сообщил каждому (по секрету от остальных) одну из цифр номера: Лене – первую цифру, Васе – вторую, Коле – третью и попросил угадать номер нужного автобуса (дети знают, кому сообщена первая цифра номера, кому – вторая, а кому – третья).

После этого между ребятами состоялся разговор:

Лена: я не знаю номера, но понимаю, что и остальные его не знают.

Вася: я не знаю номера, но Коля теперь должен его знать.

Коля: да, я знаю номер, и Вы двое помогли мне его определить.

Укажите и Вы номер нужного автобуса?

**Ответ:** 367.

**Решение.**

1) Если бы первой цифрой была 5, Лена бы сразу знала ответ. А она не знает, поэтому 5 не подходит. Значит, первой цифрой может быть 1, 2 или 3.

2) Если бы первой цифрой была 2, то у таких комбинаций была бы уникальная вторая цифра – 5 или 8. Поскольку Вася знает вторую цифру, то любой бы из этих вариантов однозначно дал бы ему ответ. Но ведь Лена уверяет, что Вася тоже не знает ответа. Значит, первой цифрой 2 не может быть.

На первом месте могут быть цифры 1 и 3.

3) Если бы первой цифрой была бы 1, то уникальные цифры 4 и 1 на третьем месте дали бы ответ Коле. Но Лена уверена, что Коля ответа не знает.

Значит, Лене названа не 1. Остается только 3.

4) Вася и Коля по фразе Лены могут определить первую цифру.

5) Если бы Васе была бы названа 7, он бы выбрал нужный вариант. Но он не смог, значит, ему назвали 6 и он не может определить третью цифру.

6) Коля знает, что речь идет о первой цифре 3 после слов Лены.

Если бы ему сообщили бы цифру 5, он бы знал ответ после слов Лены.

Но он его узнал, только после слов Васи. Значит, до этого он не мог выбрать между двумя вариантами с 7.

После слов Васи он знает, что речь может идти только о 6 на второй позиции. Следовательно, номер автобуса – 367.