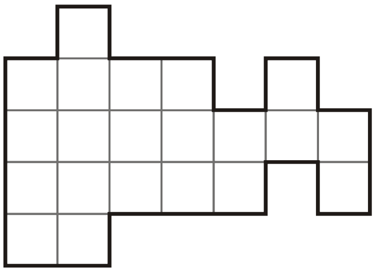
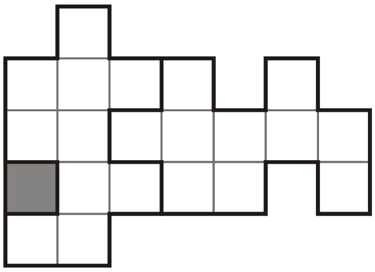
Зимний тур XXV Турнира Архимеда
Условия и решения задач

Задача 1 (4 балла). ***Закрасьте на рисунке*** одну клетку и незакрашенную часть разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части.



Решение:



Примечание:

Если фигуры равновелики, но не равны, то ставилось 0 баллов.

Задача 2 (5 баллов). ***Однажды утром*** в 9.00 из деревни Федино в деревню Екатериновка вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Екатериновки выехала велосипедистка Катя. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Катя встретились?

Ответ: в 10 часов 20 мин.

Решение 1.

1) За одно и то же время (до встречи) Вася прошел треть пути, а Катя две трети пути — в два раза больше, чем Федя. Следовательно, скорость Кати в 2 раза больше, чем скорость Феди.

2) Половину пути Федя проходит на 1 час дольше, чем Катя, а весь путь на 2 часа дольше. При этом на весь путь он тратит в 2 раза больше времени. Следовательно, на весь путь Федя потратит 4 часа, а Катя – 2 часа.

3) Треть пути Федя пройдет за 4/3 часа. Следовательно, время их встречи 10 часов 20 минут.

Примечание:

Задача не решена, но установлено, что половину пути Федя проходит за 2 часа, путь за 4 часа, то ставилось 2 балла.

Задача не решена, но указано, что скорость Кати в 2 раза больше – 1 балл

Задача 3 (3+3 баллов). ***Вася и Петя*** задумали по 5 натуральных чисел, причем все 10 задуманных чисел оказались различными. Среднее арифметическое чисел Васиного набора равно наибольшему числу Петиного набора. Может ли среднее арифметическое чисел Петиного набора быть равно А) наименьшему числу Васиного набора? Б) наибольшему числу Васиного набора?

А) Ответ: Да.

Решение.

Пример. Числа Васи: 6, 8, 11, 12 и 13. Среднее арифметическое: 10.

Числа Пети: 1, 3, 7, 9 и 10. Среднее арифметическое: 6.

Б) Ответ: нет.

Решение.

Среднее арифметическое меньше самого большого из чисел. Значит, самое большое число Васи больше самого большого числа Пети. Среднее арифметическое Васи меньше самого большого числа Васи, которое больше самого большого числа Пети.

Равенство невозможно.

Возможно и алгебраическое доказательство через неравенства.

Примечание:

При отсутствии примера в пункте А) ставилось 0 баллов

Если в пункте А) числа Васи и Пети повторяются – 0 баллов

Если в пункте Б) имелись ошибки в утверждениях, их последовательности или выводах из них – 0 баллов

Задача 4 (6 баллов). ***Две суммы.*** Известно, что сумма $ТУРНИР + АРХИМЕДА$ кратна 2016. Докажите, что сумма $ИР + АР$ кратна 9. (Цифры заменены буквами: разные цифры – разными буквами, одинаковые цифры – одинаковыми буквами)

Решение.

1) Поскольку сумма кратна 2016, она кратна 9.

Пусть у ТУРНИР остаток Х, тогда у АРХИМЕДА остаток (9–Х) при делении на 9.

2) Остаток числа совпадает с остатком суммы цифр. Сумма Т+У+Р+Н+И+Р дает остаток Х, сумма А+Р+Х+И+М+Е+Д+А дает остаток (9–Х). Сумма Т+У+Р+Н+И+Р+А+Р+Х+И+М+Е+Д+А дает остаток 0. При этом Т+У+Р+Н+И+А+Х+М+Е+Д=45, поскольку тут присутствует ровно 10 различных букв. Значит, Р+А+Р+И имеет остаток 0.

3) I способ. И+Р и А+Р имеют соответственно остатки N и 9–N. Значит, эти же остатки будут и у ИР и АР. Значит, ИР+АР делится на 9.

3) II способ. ИР+АР = 9(И+А) + (Р+А+Р+И) делится на 9, так как каждое слагаемое делится на 9.

Пример существования таких чисел (от детей этого не требовалось):

104384 + 24986752 = 25091136 (1 - Т, 0 - У, 4 - Р, 3 - Н, 8 - И, 2 - А, 9 - Х, 6 - М, 7 - Е, 5 - Д).

Примечание:

Задача не решена, но:

– Замечено, что в сумме двух чисел присутствует 10 различных букв, сумма которых равна 45, то есть кратна 9 – 2 балла

– Имеются верные соображения (делимость на 9 и т.п.) и без грубых ошибок – 1 балл.

Задача решена, но не обоснована делимость на 9 (через остатки или иным способом) – 4 балла

Задача 5 (6 баллов). ***На столе*** три слитка золота весом в 3, 4 и 5 г. На каждом слитке указан вес, но надписи могут быть перепутаны. Вес слитков можно сравнивать на чашечных весах без гирь, но в момент взвешивания на одну из чашек (любую) прыгает невидимый гном весом в 1 г. Как, сделав не более двух взвешиваний, выяснить правильный вес хотя бы одного слитка?

Решение:

Выберем произвольно какой-нибудь слиток.

Сравним его вес с двумя другими, помещая на оба раза на одну чашку весов (слева).

Результаты взвешивания могли быть следующими (вне зависимости от последовательности):

1.	>	>	Это могло быть, если вес слитка слева – 5 г: 5 > 3, 5 > 4 (гном слева). Других вариантов нет
2.	=	=	Это могло быть, если вес слитка слева – 4 г: 4=3, 4=5
3.	<	<	Это могло быть, если вес слитка слева – 3 г: 3<4, 3<5
4.	>	<	Это могло быть, если вес слитка слева – 4 г: 4>3, 4<5
5.	>	=	Он мог получиться, только в двух случаях: 5>3, 5=4 или 4>3, 4=5. В обоих случаях в там, где нет равенства на «легкой» чаше слиток в 3 г.
6.	<	=	Он мог получиться, только в двух случаях: 4<5, 4=3 или 3<5, 3=4. В обоих случаях в там, где нет равенства на «тяжелой» чаше слиток в 5 г.

При всех результатах один из слитков найден.

Возможны и другие решения задачи.

Примечание:

Если в рассмотрены все случаи, но имеются ошибки в выводах – не более 3 баллов

Если при предложенном решении рассмотрены не все случаи, но присутствует случай 5 и/или 6 из таблицы выше – 3 балла

Рассмотрены не все случаи и нет вариантов 5 или 6 – 0 баллов

Задача 6 (4+4 баллов). ***Да или нет?*** А) Каждую клетку таблицы 20×15 красят в один из двух цветов: белый или черный. Можно ли их окрасить так, чтобы у каждой клетки были ровно две соседние клетки другого цвета? Б) Тот же вопрос для таблицы 20×16. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону).

Ответ: а) нет, б) да.

Решение.

А) Пусть получилось раскрасить, тогда каждая клетка, находящаяся внутри таблицы, имеет 2 белых и 2 черных соседа.

1) Если к какой-нибудь клетке примыкают два соседа одного цвета, то оставшихся два соседа – другого цвета

2) Две клетки, которые примыкают к углу – одноцветные.

Тогда чередование цветов происходит аналогично рис. 1.

Тогда,

1) Если «исходить» из левого верхнего угла получим, что клетки 1, 2 окрашены одинаково (в черный цвет, если в левом верхнем углу черная клетка, в белый, если в углу – белый цвет).

2) Если «исходить» из правого верхнего угла получим, что клетки 1, 2 окрашены по-разному.

Получаем противоречие. Следовательно, так раскрасить таблицу 20×15 нельзя.

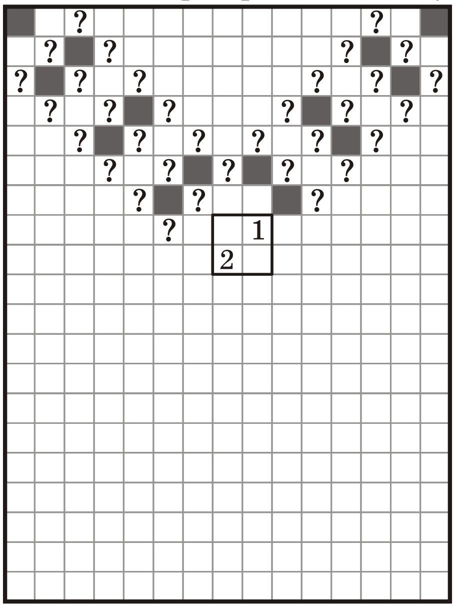


Рис. 1.

Б) Примеры раскрасок см. рис 2 и 3.

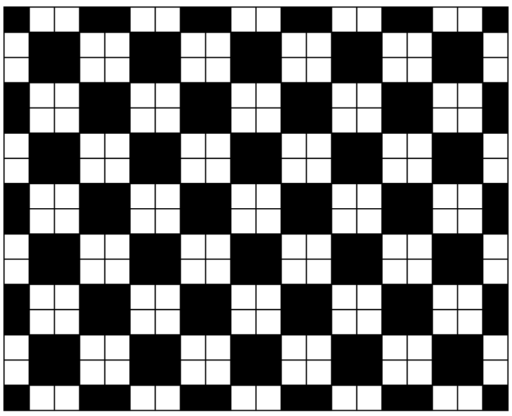


Рис. 2

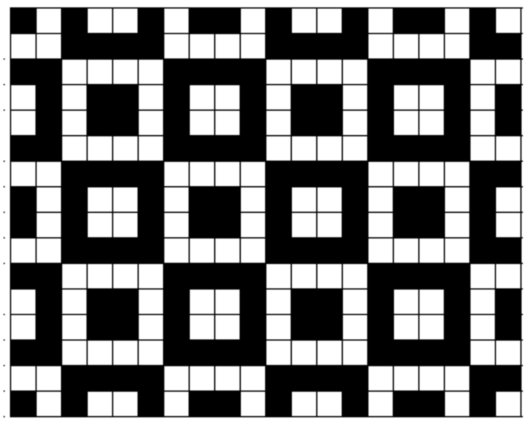


Рис. 3

Примечание:

Верная идея решения, не доведенная до конца – 2 балла