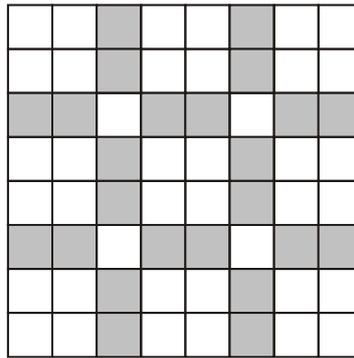


Зимний тур XXIV Турнира Архимеда

Условия и решения задач

Задача 1 (3 балла). *Упорный Вася* хочет из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник 1×3 . (Резать можно только по линиям сетки). И у него это получилось! Покажите на рисунке, как он мог это сделать.

Решение:



Задача 2 (4 балла). *На завтрак* Малыш и Карлсон ели конфеты, причем Карлсон съел все свои конфеты, а Малыш только 20% своих конфет. Известно, что вместе они съели 80% всех конфет, имевшихся у них до завтрака. У кого из них до завтрака было больше конфет и во сколько раз?

Ответ: больше конфет было у Карлсона; в 3 раза.

Решение 1.

Заметим, что 80% конфет, имевшихся у Малыша, составляют 20% общего количества конфет. Следовательно, 100%, имевшихся у Малыша, составляют 25% общего количества конфет. Остальные 75% общего количества конфет – конфеты Карлсона. Следовательно, у Карлсона первоначально было в 3 раза больше конфет, чем у Малыша.

Решение 2.

Пусть у Малыша x конфет, а у Карлсона y конфет, а всего съедено $0,2x + y$ конфет.

С другой стороны их – $0,8(x + y)$. Получаем уравнение: $0,2x + y = 0,8(x + y)$. Откуда $2y = 6x$ или $y = 3x$. Следовательно, у Карлсона конфет больше в 3 раза.

Примечание:

Если верный ответ получен из неверных вычислений, то ставилось 0 баллов.

Если предлагался ответ «у Карлсона больше в 3 раза» без обоснования или с указанием примера количества конфет, то ставился 1 балл

За вычислительную ошибку на последних шагах снимался 1 балл.

Тем или иным способом получен (обоснованный) ответ «у Карлсона конфет больше», ошибка в вычислениях не позволила получить ответ «в 3 раза» – 2 балла

Задача 3 (6 баллов). *Однажды на острове* Рыцарей (которые всегда говорят правду) и Лжецов (всегда лгут), приехал путешественник. Выйдя на берег, он встретил процессию из четырех островитян, которые несли 12 красных и 4 синих шариков (по 4 каждый). Каждый из них высказал одно утверждение. Первый сказал: "Красных шариков у меня меньше, чем синих", Второй сказал "Синих шариков у меня не меньше чем красных", Третий сказал: "Синих и красных шариков у меня поровну", Четвертый: "Красных у меня не более одного". Не можете ли Вы указать, сколько рыцарей могло быть среди них?

Ответ: рыцарей может быть 0, 1 или 2.

Решение

Докажем, что среди четырех встреченных островитян не более двух рыцарей.

Действительно, если высказывания первого и третьего истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян есть лжец.

Если высказывания второго и четвертого островитян истинны одновременно, то синих шаров не менее 5. Следовательно, среди этих двух островитян тоже есть лжец.

То есть, среди островитян не менее двух лжецов.

Приведем примеры, когда рыцарей 0, 1 или 2.

1) Рыцарей нет: у первого все шары красные, у второго и третьего по три красных и одному синему, у четвертого два синих и два красных.

2) Рыцарь один: у каждого из первых трех четыре красных шара (лжецы), у четвертого четыре синих шара (он рыцарь).

3) Рыцарей два: у первого и четвертого все шары красные (лжецы), у второго и третьего по два синих и два красных шара (рыцари).

Примечание:

Обосновано наличие не менее 2-х лжецов – 3 балла

За каждый пример ответа с обоснованием +1 балл

Правильный ответ (все три варианта) без решения – 1 балл

Только 1 или 2 варианта ответа без обоснования – 0 баллов

Наиболее часто упускался случай, когда рыцарей среди островитян нет.

Задача 4 (6 баллов). *Белоснежка и 2015 гномов.* В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного), и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

Ответ: всегда.

Решение 1.

Первых трех гномов распределим по трем группам произвольно. Следующего (любого) поместим в группу, где нет гнома, связанного с ним отношением обиды. Такая группа есть (Принцип Дирихле). Со следующим можем поступить аналогично. И так далее, все гномы будут распределены по трем группам.

Решение 2.

Возможны решения с представлением всех гномов в виде одной или нескольких замкнутых цепочек.

Действительно, так как все гномы связаны с обидой только с каким-то одним из остальных, то нет гнома, не связанного обидой с кем бы то ни было.

Можно представить каждого гнома в виде точки, в которую приходит один направленный отрезок от другой точки (от того, кто на него обиделся) и исходит направленный отрезок к другой точке (к тому гному, на кого обиделся данный гном).

При этом может существовать одна цепочка, либо несколько не связанных между собой цепочек, причем в каждой цепочке не менее 2-х гномов

Если в цепочке больше двух гномов, то пронумеруем всех гномов, в первую группу включим одного гнома с наибольшим номером, из оставшихся во вторую группу включим гномов с нечетными номерами, в третью – гномов с четными номерами.

Поступим аналогично, со всеми такими цепочками.

Гномы из разных цепочек друг с другом не связаны.

Для цепочек, состоящих из двух гномов, каждого гнома разместим в группы произвольно.

Возможны и другие способы обоснования разбиения по группам.

Примечание:

За ответ «всегда» без обоснования баллы не ставились

Гномы из разных цепочек друг с другом не связаны. Если этой идеи нет, то минус 1 балл.

Решение верное, но не учитывает существование цепочек по 2 гнома – 4 балла.

Если разбиение предлагалось на примере 1-й цепочки или любой другой частный случай, то ставились 2 балла

Идеи про цепочки, но без внятного алгоритма распределения – 1 балл

Подавляющее большинство участников решали задачу через различные варианты цепочек.

Задача 5 (8 баллов). Ребус. Вася составляет очередной ребус. Чтобы закончить работу, он хочет подобрать такие значения букв, чтобы число $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ разделилось нацело на число $\overline{\text{ПАНАМА}}$. Удастся ли ему это сделать? (в ребусе одинаковые буквы должны обозначать одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры).

Ответ: нет.

Решение:

Предположим, число $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ кратно числу $\overline{\text{ПАНАМА}}$.

Вычтем из числа $\overline{\text{ПАНОРАМА}}$ число $\overline{\text{ПАНАМА00}}$.

Поскольку первые три цифры уменьшаемого вычитаемого совпадают, полученная разность (в том числе по модулю, если $\overline{OP} < \overline{AM}$) окажется не более чем пятизначной.

При этом эта разность должна быть кратна шестизначному числу $\overline{\text{ПАНАМА}}$, что возможно, только если это число равно 0.

Следовательно, $\overline{\text{ПАНОРАМА}} = \overline{\text{ПАНАМА00}}$, что невозможно, так как цифры \overline{M} и \overline{A} различны.

Примечание:

За ответ «нет» без обоснования баллы не ставились

Полное решение – 8 баллов

Идея про умножение на 100 не доведенная до конца – 2 балла

Идея деления в столбик - 2 балла

Подавляющее большинство участников пыталось решать задачу именно так, но полного решения таким путем не написал никто.

Отметим, что для этого решения необходимо рассматривать два случая: $OP > AM$ и $OP < AM$.

В первом случае получаем вариант с числом, начинающимся на 10... и при этом получить целое число в частном невозможно.

Во втором случае (его редко рассматривали) первой цифрой частного будет 9. При этом дальнейшие рассуждения имеют сложный характер, которые никто из участников привести не смог

Задача вызвала наибольшую сложность среди участников.

Задача 6 (8 баллов). *Иван Царевич и Кощей* нашли кошелек с 12 монетами номиналом 1, 2, 3, 4, ..., 12 тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам:

1) Кощей достает из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану Царевичу;

2) Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощей (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощей, возвращают в кошелек.

Если сумма в кошельке не кратна 3, дележ заканчивается, Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать, независимо от игры Кощей?

Ответ: а) да, б) 49 тугриков.

Решение.

В кошельке 78 тугриков и это число кратно 3.

а) Если Кощей показывает Ивану монету не кратную 3, то Иван отдает её Кощей, а другую монету возвращает в кошелек, сумма оставшихся монет будет не кратна 3, и все оставшиеся монеты забирает Иван (при этом он выигрывает).

Кощей требуется, как можно дольше доставать только монеты кратные 3, поэтому первые два хода Кощей показывает Ивану пары монет кратных 3.

За эти два хода Ивану нужно три монеты отдать Кощей, а одну вернуть в кошелек, чтобы на третьем ходу Кощей мог показать либо по одной монете кратной трем и одной не кратной трем, либо две монеты не кратные 3.

В худшем случае (для Ивана), Кощей получит монеты в 6, 9 и 12 тугриков и монету в 11 тугриков. Итого: 38 тугриков. При этом Иван получит больше – не менее 40 тугриков.

б) Если среди первых двух монет хотя бы одна не кратна 3, то Иван отдает её Кощей и получает не менее $78 - 11 = 67$ тугриков

Если среди первых двух монет обе кратны 3, то Иван Царевич отдает Кощей монету меньшего номинала.

Например.

Если Кощей покажет $12 + 9$ тугриков, то получит 9 тугриков, а 12 тугриков Иван вернет в кошелек.

Если второй раз Кощей $12 + 6$ тугриков, то получит 6 тугриков, а 12 тугриков Иван вернет в кошелек.

Если третий раз Кощей даст $12 + 3$ тугриков, то получит 3 тугрика, а 12 тугриков Иван вернет в кошелек. Таким образом у Ивана Царевича сохраняется монета 12 тугриков.

В четвертый раз Кощей выгодно дать $12 + 11$ (наибольшая монета, не кратная 3-м) тугриков, и получит 11 тугриков.

Итого 29 тугриков достанется Кощей. Ивану достанется 49 тугриков.

Примечание:

За ответ «да» без обоснования баллы не ставились

За ответ «49» без обоснования – 1 балл

Правильное решение пункта а) – 5 баллов (если решен только а)

Правильное решение пункта б) – 8 баллов

Если в пунктах а) и/или б) приводились вычисления без обоснования действий Ивана Царевича и/или Кощей, то снимались 1-3 балла (в зависимости от степени подробности описания алгоритма).

Наиболее типичной ошибкой было предложение отдать Кощей все 4 монеты кратные трем (что, как нетрудно подсчитать, приведет к большей сумме у Кощей).