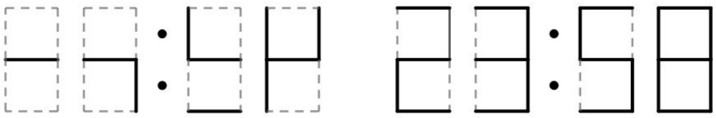
Весенний тур XXVII Турнира Архимеда. 5 класс
1 апреля 2018 года
Личный этап.

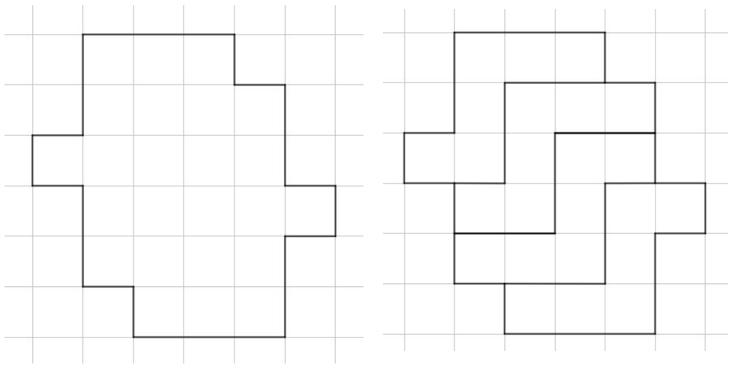
Задача 1. [**4 балла**] Некоторые сегменты электронных часов сломались и теперь не горят. Какое время они показывают?



Ответ: 23:**58**, см. рис.
Критерии:

— по **1** баллу за каждую верную цифру

Задача 2. [**4 балла**] Разрежьте фигуру на четыре равные части. *Равными называются фигуры, которые можно совместить наложением.*



Ответ: см. рис.
Критерии:

— приведен верный ответ и отсутствуют неверные: **4** балла;
— приведено несколько ответов, среди которых есть верный: **3** балла;
— другие случаи: **0** баллов.

Задача 3. [**4 балла**] Элиуд Кипчоге наметил пробежать некоторую дистанцию за два часа. Однако за это время он не добежал до финиша **75** метров, но за два часа и одну минуту он смог бы пробежать на **276** метров больше, чем планировал. Какую дистанцию собирался пробежать Элиуд Кипчоге?
Ответ: 42 195 метров.
Решение. Из условия задачи следует, что за одну минуту Элиуд Кипчоге пробегает **75** + **276** = = **351** метр. Тогда вся дистанция составит **120** · **351** + **75** = **42 195** метров.
Критерии:

— приведено полное решение и получен верный ответ: **4** балла;
— отмечено, что Кипчоге за минуту пробегает 75 + 276 метров: **2** балла;
— приведен только ответ: **1** балл;
— другие случаи: **0** баллов.

Задача 4. [**6 баллов**] У Пети есть **100** рублей одной купюрой, а у Андрея полные карманы монет по **2** и **5** рублей. Сколькими способами Андрей может разменять купюру Пети?
Ответ: 11 способов.
Решение. Андрей не может дать Пете нечетное количество пятирублевых монет, так в этом случае общая сумма также будет нечетной. Значит, Андрей может дать Пете любое четное число пятирублевых монет от **0** до **20**, таких чисел **11**, а остаток набрать двухрублевыми монетами.
Критерии:

— приведено полное решение и получен верный ответ: **6** баллов;
— ход решения верный, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **4** балла;
— приведено соображение четности количества пятирублевок: **2** балла;
— приведен только ответ: **1** балл;
— другие случаи: **0** баллов.

Задача 5. [**8 баллов**] На доску подряд выписали числа от **1** до **500**: 12345678910111213...499500. В полученном числе вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах (получили число 24681111...) Затем у нового числа (с вычеркнутыми цифрами) снова вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. Эту операцию повторяли до тех пор, пока не осталась одна цифра. Какая?
Ответ: 3.
Решение. После первого вычеркивания на нечетных местах стоят цифры, которые в исходном числе стояли на четных, но не кратных четырем местах, следовательно, после второго вычеркивания останутся цифры, которые в исходном числе были на местах, кратных четырем (4, 8, 12, 16, ...). Теперь на нечетных местах находятся цифры, которые в исходном числе были на местах кратных четырем, но не кратных восьми, следовательно, после третьего вычеркивания останутся цифры, которые в исходном числе были на местах, кратных восьми (8, 16, 24, ...).
Так как длина исходного числа больше **512**, но меньше **2048**, то в результате останется цифра, стоящая в исходном числе на **1024**-м месте. Найдем ее.
Первые **9** цифр — это однозначные числа, следующие $\mathbf{90 \cdot 2 = 180}$ — двузначные, далее каждая сотня чисел занимает по **300** цифр. Таким образом искомая цифра $\mathbf{1024 - 9 - 180 - 300 \cdot 2 = 235}$ в диапазоне 300..399. Так как каждое число занимает три цифры, а $\mathbf{235 = 3 \cdot 78 + 1}$, то искомая цифра — это первая цифра числа **378**.
Критерии:

— приведено полное решение и получен верный ответ: **8** баллов;
— ход решения верный, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **6** балла;
— доказано, что останется 1024-я цифра: **4** балла;
— приведен только ответ: **1** балл;
— другие случаи: **0** баллов.

Задача 6. [**8 баллов**] Поле для настольной игры имеет вид квадрата **5×5**. Игроки выставляют фишки на свободные клетки, при выставлении фишки игрок получает очки по числу (ранее выставленных) фишек, находящихся в соседних клетках. Чему равна сумма всех набранных игроками очков после того, как все поле будет заполнено? *Соседними считаются клетки имеющие общую сторону или общую вершину.*
Ответ: 72.
Решение. *Первый способ.* Заметим, что каждая пара соседних клеток принесет ровно одно очко — в момент выставления фишки во вторую клетку из этой пары. Значит, необходимо посчитать количество пар соседей. В каждой строчке и в каждом столбце по **4** пары соседних по стороне клеток. В каждом квадрате **2×2** две пары соседних клеток, имеющих лишь общую вершину, в квадрате **5×5** таких квадратов **16** (они могут перекрываться), значит всего в квадрате $\mathbf{(5 + 5) \cdot 4 + }$ $\mathbf{+ 16 \cdot 2 = 72}$ пары соседних клеток.

Второй способ. Запишем в каждую клетку количество ее соседей. Для угловых клеток это число равно **3** (таких клеток четыре), для клеток на стороне квадрата — **5** (таких клеток **12**), в центре квадрата — **8** (таких клеток **9**). Тогда сумма всех записанных чисел $\mathbf{2 \cdot 4 + 5 \cdot 12 + 8 \cdot 9 = 144}$. Число набранных очков в два раза меньше, так как из каждой пары соседних клеток очко принесет ровно одна — та, в которой фишка стояла раньше (произойдёт это в момент выставления фишки в другую клетку пары).

Критерии:

— приведено полное решение и получен верный ответ: **8** баллов;
— ход решения верный, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **6** баллов;
— присутствует идея подсчета пар соседей: **2** балла;
— приведен только ответ: **1** балл;
— другие случаи: **0** баллов.