Весенний тур XXV Турнира Архимеда. 5 класс
3 апреля 2016 года
Личный этап.

Задача 1. [***4 балла***] Число **2016** можно представить как сумму всех натуральных чисел от **1** до **63** (то есть **1 + 2 + 3 + … + 62 + 63 = 2016**). А какой ближайший год в будущем можно будет представить как сумму всех натуральных чисел от **1** до некоторого другого числа?

Ответ: 2080.

Решение (от участников не требуется). Следующий такой год будет при добавлении следующего за 63 натурального числа:

1 + 2 + 3 + … + 62 + 63 + 64 = 2016 + 64 =2080.

Критерии:

— приведён верный ответ и отсутствуют неверные: **4** балла;

— приведено несколько (2-3) ответов, среди которых есть верный: **3** балла;

— приведено действие 2016 + 64, но действие выполнено с ошибкой: **3** балла;

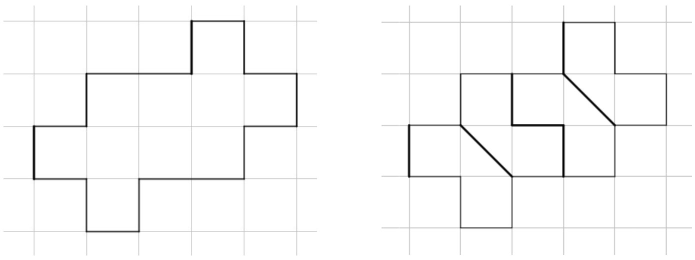
— приведено действие 1 + 2 + 3 + … + 62 + 63 + 64 , но вычисления выполнены с ошибкой: **1** балл;

— приведён не ближайший такой год (например, 2145, 2211, 4950 или 5050): **1** балл;

— другие случаи: **0** баллов.

И. Эльман

Задача 2. [***4 балла***] Разрежьте данную фигуру на четыре равные части (не обязательно по линиям сетки). *Равными называются фигуры, которые можно совместить наложением*.



Ответ: например, см. рисунок.

Критерии:

— приведён верный ответ и отсутствуют неверные: **4** балла;

— приведено несколько (2-3) ответов, среди которых есть верный: **3** балла;

— другие случаи: **0** баллов.

И. Эльман

Задача 3. [***5 баллов***] На горнолыжном курорте в продаже имеются абонементы на **2**, **4** и **6** дней. Абонементы на **6** и на **2** дня вместе стоят дороже, чем два абонемента на **4** дня, а два абонемента на **2** дня не дороже, чем один абонемент на **4** дня. Что дороже: один абонемент на **6** дней или три абонемента на **2** дня?

Ответ: дороже один абонемент на 6 дней.

Решение. По условию вместо абонементов на 6 дней и 2 дня выгоднее купить два абонемента на 4 дня, а свою очередь, вместо каждого из абонементов на 4 дня можно без потери в деньгах купить два абонемента на 2 дня. Значит, абонементы на 6 дней и 2 дня дороже четырех абонементов на 2 дня, откуда получаем, что один абонемент на 6 дней дороже трех абонементов на 2 дня.

Критерии:

— приведено верное обоснованное решение: **5** балла;

— в рассуждения присутствуют существенные пробелы: **3-4** балла;

— приведен только верный ответ (возможно, при невнятных, но не заведомо неверных, рассуждениях) или задача решена на примере: **1** балл;

— неверный ответ: **0** баллов.

И. Эльман

Задача 4. [***5 баллов***] В стране Утопии есть крупные и мелкие города. Из каждого крупного в каждый мелкий есть один авиарейс в сутки, а из каждого крупного в каждый крупный — два авиарейса в сутки. Между мелкими городами авиарейсов нет. Известно, что из столицы (крупного города) всего выполняется **99** рейсов в сутки. Сколько новых рейсов (в сутки) появится в этой стране после присоединения к ней новой области, в которой находятся два крупных города, при сохранении тех же правил?

Ответ: 204 рейса.

Решение. Рассмотрим три группы новых рейсов:

1) внутренние рейсы новой области: это два рейса между крупными аэропортами этой области;

2) рейсы в столицу, их четыре: по два из каждого крупного аэропорта;

3) рейсы во все остальные аэропорты Утопии: из каждого крупного аэропорта они вылетают в те же аэропорты и в тех же количествах, что и из столицы, таким образом, их 198.

Всего появится $2 + 4 + 198 = 204$ новых рейса.

Критерии:

— приведено верное обоснованное решение: **5** балла;

— при верных рассуждениях получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **4** балла;

— в решении не учтены внутренние рейсы: **3** балла;

— замечено, что из всех крупных аэропортов вылетает одинаковое число рейсов: **2** балла;

— задача решена на примере (т. е. взяты конкретные количества крупных и мелких аэропортов): **1** балл

— ответ без решения: **0** баллов.

И. Эльман

Задача 5. [**6 *баллов***] В **10:50** из Радонежа в Абрамцево вышел лыжник. Через **45** минут вслед за ним вышел второй лыжник и догнал первого, когда до Радонежа было в два раза ближе, чем до Абрамцево. Дойдя до Абрамцево, второй лыжник сразу повернул назад и встретил в первого, когда до Абрамцево было в два раза ближе, чем до Радонежа. В какое время второй лыжник вернется в Радонеж? *Скорости лыжников постоянны.*

Ответ: 13:50.

Решение. Сначала найдем во сколько раз скорость быстрого лыжника больше скорости медленного. Примем расстояние от Радонежа до Абрамцева за три части (см.рисунок, PM = MN = NA), от первой встречи (точка M) до второй (точка N) медленный лыжник проходит одну часть (отрезок MN), а быстрый — три (MP + PN). Значит, скорость быстрого лыжника в три раза больше скорости медленного.

Теперь примем за три части расстояние от Радонежа до точки их первой встречи (на рисунке PD — две части, DM — одна часть, а всё расстояние PA составляет 9 таких частей). До момента их первой встречи медленный лыжник прошел в три раза меньше быстрого, значит в момент выхода второго лыжника он был в двух частях от Радонежа (то есть в точке D). Таким образом, медленный лыжник проходит *две* части (отрезок PD) за 45 минут, а быстрый — за 15 минут. Весь путь быстрого лыжника составляет 18 частей, которые он преодолеет за 9•15 = 135 минут. Таким образом, в Радонеж он вернется через три часа после выхода первого лыжника, в 13:50.

Критерии:

— приведено верное обоснованное решение: **6** баллов;

— при верных рассуждениях получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **5** баллов;

— найдено время движения быстрого лыжника, но не найдено время его возвращения в Радонеж: **5** баллов;

— установлено, что в момент выхода второго лыжника первый прошел 2/9 всего пути: **4** балла;

— задача решена на примере (т. е. выбрано конкретное расстояние от Радонежа до Абрамцево): **3** балла;

— найдено соотношение скоростей лыжников: **2** балла;

— ответ без решения: **0** баллов.

И. Эльман

Задача 6. [**8 *баллов***] Трое ребят соревновались в решении задач. В итоге каждый из них решил **10** задач. Жюри оценивает задачи так: если задачу решил только один из них, то ему даётся **3** балла; если задачу решили двое, то каждому из них даётся по **1** баллу; если же задачу решили все трое, то за неё не даётся баллов. В итоге больше всех баллов набрал Митя, второе место занял Лёша, а проигравший Игорь набрал **19** баллов. Сколько баллов набрал Митя и сколько баллов — Лёша?

Ответ: Митя набрал 25 баллов, а Лёша — 21 балл.

Решение. Задачи, решённые только одним из ребят, назовем трудным, двумя — средними, а всеми тремя — легкими. Количество решенных легких задач у всех одинаково.

1) Заметим, что каждый из них решил не менее 5 трудных задач, иначе для того, чтобы набрать хотя бы 19 баллов потребовалось бы всего решить более 10 задач.

2) Если Игорь решил 6 трудных задач, то за них он получил 18 баллов, еще один балл он получил за среднюю задачу, а три легких задачи решили все трое. Есть только один способ набрать больше баллов: решить 7 трудных и 3 легких задачи, а по условию два человека набрали различное большее количество баллов. Более 6 трудных задач Игорь решить не мог, так как тогда бы он только за них набрал более 19 баллов. Значит Игорь решил ровно 5 трудных задач и получил за них 15 баллов, еще 4 балла он получил за средние задачи, а одну легкую задачу решили все трое.

3) Леша решил больше трудных задач, чем Игорь, а Митя — больше, чем Леша. Значит, Леша решил меньше средних задач, чем Игорь, а Митя их решил меньше, чем Леша. При этом, в сумме они решили не менее 4 средних задач, так как каждую среднюю задачу, решенную Игорем, решил кто-то из них.

4) Легко заметить что, единственный подходящий вариант следующий: Леша решил 6 трудных задач, 3 средних и 1 легкую и набрал 21 балл, а Митя решил 8 трудных, 1 среднюю и 1 легкую и набрал 25 баллов. В этом случае одну задачу решили Игорь и Митя и три задачи — Игорь и Леша, а задач, решенных только Митей и Лешей, — не было.

Критерии:

- приведено верное обоснованное решение: **8** баллов;
- при верных рассуждениях получен неверный ответ из-за арифметической ошибки при вычислении окончательной суммы баллов: **7** баллов;
- установлено, что Леша решил 6-8 трудных задач (больше, чем Игорь) и 1-3 средние, а Митя — 7-9 трудных (больше, чем Леша) и 0-2 средние: **6** баллов.
- установлено, что Игорь решил 5 трудных, 4 средних и 1легкую задачу (при этом явно рассматривать случай 7 и более трудных задач не обязательно): **4** балла;
- замечено, что каждый (или хотя бы Игорь) решил не менее 5 трудных задач: **2** балла;
- верный ответ с проверкой: **1** балл;
- ответ без решения: **0** баллов.

По мотивам УТЮМ 1996 г.