

Весенний тур XX Турнира Архимеда

3 апреля 2011.

5 класс.

Личный тур.

1. (3 балла) Разрежьте фигуру, изображенную на рис. 1, по линиям на три равные части.

Ответ: см. рис. 2.

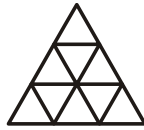


Рис. 1

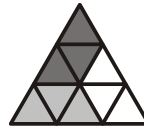


Рис. 2

2. (4 балла) Электронные часы показывают время: часы – двумя цифрами, минуты – двумя цифрами и секунды – двумя цифрами. Укажите наибольшую возможную сумму цифр, одновременно показываемых часами. Ответ объясните.

Ответ: 38.

Решение. Часы могут быть записаны от 00 до 24. Самая большая сумма цифр у числа 19. Минуты и секунды могут быть записаны от 00 до 60. Самая большая сумма цифр у числа 59. Получаем 19:59:59. Сумма цифр равна 38.

3. (5 баллов) На острове туземцев племени Топ-Топ любые две деревни соединены отдельной дорогой. После постройки трёх новых деревень туземцам пришлось построить 33 новые дороги. Сколько деревень стало на острове туземцев племени Топ-Топ? Ответ объясните.

Ответ: 13.

Решение. Три новые дороги соединяют между собой новые деревни. Остальные 30 дорог соединяют новые деревни со старыми. Значит, из каждой новой деревни к старым выходит ровно 10 дорог. Следовательно, старых деревень 10. Всего деревень стало 13.

4. (6 баллов) Можно ли расставить в клетках квадрата 3x3 цифры от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке сумма двух меньших цифр равнялась большей? (В каждой клетке должна стоять ровно одна цифра. Каждая цифра должна быть использована.) Если ответ: да, то приведите пример, если ответ: нет, то объясните.

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Если в строке сумма двух меньших цифр равняется большей, то сумма цифр, стоящих в строке, – чётное число. Следовательно, сумма всех цифр в квадрате должна быть чётной. Но, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

5. (6 баллов) Перед матчем команд «Шайба» и «Зубило» болельщики команд дали прогнозы на матч.

Три болельщика «Шайбы» дали такие прогнозы:

1) «Шайба» выиграет, 2) «Шайба» не проиграет, 3) «Шайба» забьёт хотя бы один гол.

Три болельщика «Зубила» дали такие прогнозы:

1) «Зубило» выиграет, 2) «Зубило» не проиграет, 3) «Зубило» забьёт хотя бы один гол.

После матча выяснилось, что ровно ДВА прогноза оказались верными. С каким счётом закончился матч? Ответ объясните?

Ответ: Ничья 0:0.

Решение. Если бы выиграла одна из команд, то верными оказались бы как минимум три прогноза: «Выиграет», «Не проиграет», «Забьёт». Следовательно, матч закончился ничью. При ничьей два прогноза оказываются верными: «Шайба» не проиграет и «Зубило» не проиграет. Значит, все остальные прогнозы – ложные. Таким образом, ни одна из команд голов не забила.

6. (7 баллов) У двух медвежат был килограммовый кусок сыра. Они разломали его на два неравных кусочка. Лиса решила помочь им сделать кусочки равными. Сначала она откусила от большего кусочка. Потом она откусила от меньшего кусочка половину того, что откусила от большего. Затем она откусила от большего кусочка столько же, сколько от меньшего, а от меньшего опять в два раза меньше, чем от большего. И наконец, она опять откусила от большего кусочка столько же, сколько от меньшего, а от меньшего в два раза меньше, чем от большего. После этого кусочки стали равными, а масса меньшего из

первоначальных кусочков уменьшилась вдвое. Сколько сыра съела лиса?

Ответ: 600 граммов.

Решение. По условию масса меньшего кусочка уменьшилась вдвое. Значит, Лиса за три раза откусила от него столько же сыра, сколько оставила.

Пусть она откусила от него x граммов и оставила x граммов.

Каждый раз Лиса откусывала от большего кусочка ровно вдвое больше, чем от меньшего. Поэтому и в итоге она откусила от него вдвое больше, то есть $2x$ граммов. А осталось от большего кусочка столько же, сколько и от маленького, то есть x граммов.

Получаем: $x + x + x + 2x = 1000$. Отсюда следует, что $x = 200$. Лиса съела $3x$ граммов, или 600 граммов.