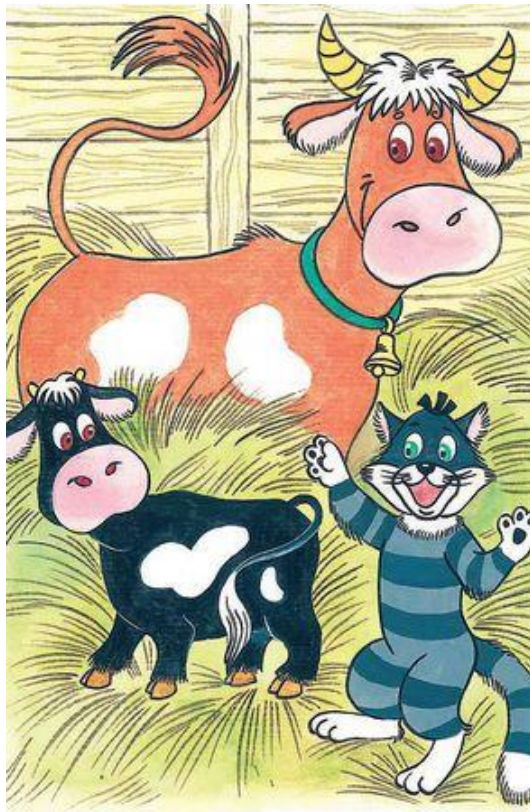


Турнир Архимеда 2014



Командная олимпиада по программированию

Задача А. “Дети коровы Мурки”



Задача А. “Дети коровы Мурки”

Для начала посмотрим на ответы на нескольких примерах:

$$n=3: (1+3+5)/3 = 3$$

$$n=4: (1+3+5+7)/4 = 4$$

$$n=5: (1+3+5+7+9)/5 = 5$$

Предположение: если задано число n , то и в ответе n .

Задача А. “Дети коровы Мурки”

Как доказать предположение?

1 вариант: Рассмотрим сумму первых n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и шагом $d = 2$. Это как раз и будет сумма наших чисел.

$$S = (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d) / 2 = (2 \cdot 1 + 2 \cdot n - 2) / 2 = (2 \cdot n) / 2 = n.$$

Задача А. “Дети коровы Мурки”

Как доказать предположение?

2 вариант: Чему будет равно i -е нечетное число?

$$a_i = 2*i - 1.$$

Рассмотрим такие пары наших чисел: первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д.

Сумма каждой такой пары будет равна $2*n$. В этом не сложно убедиться:

$$1 + 2*n - 1 = 2*n$$

$$3 + 2*(n-1) - 1 = 2*n.$$

Если n - четное, то тогда всего таких пар будет $n/2$. Значит сумма всех чисел будет

$$(2*n) * (n/2) = n^2.$$

Если n - нечетное, то пар будет $(n-1)/2$ и ещё одно число без пары. Это число с номером $(n+1)/2$.

Значит, оно будет равно n . Значит, сумма всех чисел будет равна $(n-1)/2 * 2*n + n = (n-1)*n + n = n^2$. Таким образом, в любом случае сумма первых нечетных чисел n^2 , тогда среднее арифметическое равно n .

Задача В. “Водопады”



Задача В. “Водопады”

Наш исходный ответ - 0 водопадов ($ans = 0$). Будем также использовать промежуточный счетчик , который исходно имеет значение 0 ($wf = 0$)

Пусть x_i и y_i - координаты точки с номером i .

Будем идти циклом по всем точкам, начиная с точки с номером 2. Найдем высоту и длину каждого сегмента реки

$$h_i = y_i - y_{(i-1)}, l_i = x_i - x_{(i-1)}$$

Задача В. “Водопады”

Если i -й сегмент является водопадом(т.е. его высота больше длины, $h_i > l_i$), то тогда увеличим на 1 промежуточный счетчик водопадов.

$$wf = wf + 1$$

Если i -й сегмент не является водопадом, то значит на предыдущем сегменте закончился какой-то каскад(возможно, длины 0).

Обнулим счетчик водопадов, а в ответ запишем максимум из длины каскада, который только что закончился и уже имеющегося ответа.

$$ans = \max(wf, ans)$$

$$wf = 0$$

Задача В. “Водопады”

Мы могли найти каскад, заканчивающийся последним водопадом, но не записать его длину в `ans`. Поэтому проверяем ещё раз

```
ans = max(wf, ans)
```

И выводим ответ.

Задача С. “Жук в деревне”

Каждый кустик бывает в трех состояниях:

1. На нем еще нет ни одного жука
2. На нем только что появились жуки
3. На всех соседних кустиках есть жуки

Из состояния 2 в состояние 3 куст переходит за 1 час, и в состоянии 3 количество жуков на нем увеличивается на 4 каждый час.

Задача С. “Жук в деревне”

		1	
1	1	1	
		1	

			1		
		2	2	2	
1	2	5	2	1	
		2	2	2	
			1		

				1			
			2	2	2		
		2	4	6	4	2	
1	2	6	9	6	2	1	
		2	4	6	4	2	
			2	2	2		
				1			

Задача С. “Жук в деревне”

Заметим, что есть два типа клеток:

- клетки “креста”: при переходе в состояние 1 получают 1 жука
- остальные, которые получают 2 жуков

				1				
			2	2	2			
		2	4	6	4	2		
	1	2	6	9	6	2	1	
		2	4	6	4	2		
			2	2	2			
				1				

Задача С. “Жук в деревне”

Центральная клетка:

- изначально: 1
- через 1 час: все еще 1
- дальше +4 каждый час

Через t часов (при $t > 0$) после начала на ней будут $4(t-1)+1$ жуков.

Задача С. “Жук в деревне”

Решение для центральной клетки:

- если $k = 1$, сразу выводим 0
- иначе проверяем, существует ли такое m , что $4(m-1)+1=k$, то есть делится ли $k-1$ на 4 или нет
- если да, то выводим $(k-1)/4+1$, иначе выводим -1

Задача С. “Жук в деревне”

Клетки “креста”:

- координаты: $(x, 0)$ или $(0, x)$, $x \neq 0$
- переходит в состояние 2 через x часов после начала, получает 1
- через еще час получает +1 и переходит в состояние 3
- дальше каждый час получает +4

Задача С. “Жук в деревне”

Решение для клеток креста:

- если $k = 1$, выводим x
- иначе проверяем, существует ли такое m , что $k = 2 + 4m$
- если да, выводим $x + m + 1$
- иначе выводим -1

Задача С. “Жук в деревне”

Остальные клетки:

- переходит в состояние 2 на шаге $|x|+|y|$, получает 2
- через час получает +2 и переходит в состояние 3
- дальше каждый час получает +4

Задача С. “Жук в деревне”

Решение для остальных клеток:

- считаем $step = |x| + |y|$
- если $k = 2$, выводим $step$
- если существует m , что $k = 4m$, выводим $step + m$
- иначе выводим -1

Задача D. “Телеграммы Матроскина”



Задача D. «Телеграммы Матроскина»

Заметим, что нам выгодно в каждую следующую телеграмму записать как можно больше слов.

Отсюда алгоритм: взять слово, если мы можем дописать его к текущей телеграмме, то сделать это. Если мы этого не можем, то завести новую и написать слово туда.

Задача D. «Телеграммы Матроскина»

Как проверить, что мы можем дописать к текущей телеграмме слово?

Тогда два случая:

- Слово — последнее в тексте: $\text{len_word} + 1 + \text{len_tel} \leq 140$
(старая телеграмма + пробел + слово).
- Слово — не последнее: $\text{len_word} + 1 + \text{len_tel} + 3 \leq 140$
(старая телеграмма + пробел + слово + троеточие)

(длина слова — len_word , длина текущей телеграммы — len_tel)

Задача D. «Телеграммы Матроскина»

Если получилось дописать слово, то:

`tel = tel + ' ' + word` (дописываем слово через пробел)

Если не получилось, то:

`tel = tel + '...'` (дописываем в конец телеграммы троеточие)

`write(tel)` (посылаем телеграмму)

`tel = '...' + word` (создаем новую)

Кроме того, надо не забыть послать последнюю телеграмму.

Задача Е. “Перенумеровать”



Задача Е. “Перенумеровать”

Рассмотрим наши M домов, некоторые из которых нам надо перенумеровать. Мы хотим добиться того, чтобы у всех домов были номера от 1 до M .

Разобьем дома на две группы. В первой будут дома, у которых были номера, большие M . Во второй все остальные.

Пусть в первую группу попало N домов, тогда во второй группе окажется $M-N$ домов.

Заметим, что перенумеровать меньше, чем N домов нам не удастся. Потому что тогда останется хотя бы один дом с номером больше M , что не соответствует условию.

Покажем теперь, что перенумеровать ровно N домов можно:

Дома из второй группы, которых всего $M-N$, “заняли” какие-то $M-N$ чисел от 1 до M под свои номера. Значит, осталось ещё N свободных номеров. Ими мы и перенумеруем дома из первой группы.

Задача F. “Подсчет ворон”



Задача F. “Подсчет ворон”

- Проэмулируем работу счетчика циклом
- Будем считать, сколько щелчков уже было услышано, и какое число сейчас записано
- Цикл надо остановить, как только количество щелчков окажется не меньше посчитанного Дядей Фёдором
- Если оно будет больше -- нужно вывести -1

Задача F. “Подсчет ворон”

- Пусть мы только что получили число m . Сколько щелчков прозвучало?
- Два щелчка звучат, если проворачивается и второй диск тоже, то есть мы перешли от числа вида $**9$ к числу вида $**0$. То есть если m делится на 10.
- Три щелчка: если перешли от $*99$ к $*00$, то есть если m делится на 100

Задача G. “Улыбочку!”



Задача G. “Улыбочку!”

- Заметим: использовать купе на 4 человек выгоднее, чем на двоих
- Поэтому нужно сначала использовать купе на четверых, а потом купе на двоих

Задача G. “Улыбочку!”

- Сколько купе на четверых можно использовать?
- Не больше, чем их есть: $k4$
- Не больше, чем есть людей, чтобы их заполнить: $n / 4$, округлить вверх
- Рассадим людей в $x1 = \min(k4, (n+3) // 4)$ купе

Задача G. “Улыбочку!”

- Если люди остались ($n > 4 * x_1$), сколько купе на двоих можно использовать?
- Не больше, чем их есть: k_2
- Не больше, чем осталось людей, чтобы их заполнить: $(n - 4 * x_1) / 2$, округлить вверх
- Рассадим людей в $x_2 = \min(k_2, (n - 4 * x_1 + 1) // 2)$ купе

Задача G. “Улыбочку!”

- Осталось $n_3 = n - 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2$ человек
- Если люди остались ($n_3 \geq 0$), задача неразрешима, нужно вывести -1
- Иначе все поместились в вагон, использовано $x_1 + x_2$ купе

Задача Н. “Новая игра Шарика и Матроскина”



Задача Н. “Новая игра Шарика и Матроскина”

“Раскрасим” наши числа в “черные” и “белые”. Числа с четными номерами будут “белыми”, с нечетным - “черными”.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Теперь посчитаем “черную” и “белую” сумму соответственно:

“Черная” - 10, “Белая” - 11

Утверждение: как бы ни играл Шарик, Матроскин может по своему выбору получить “белую” или “черную” сумму.

Пусть Матроскин решил собрать “черную” сумму. Тогда после его очередного хода на обоих концах останутся “белые” числа. И у Шарика просто не будет выбора. Соответственно, после того, как Шарик возьмет одно из “белых” чисел, на одном из концов будет “черное” число, которое и возьмет Матроскин следующим ходом.

Аналогично, можно показать, что если Матроскин решит собрать “белую” сумму, то он сможет это сделать.

Задача Н. “Новая игра Шарика и Матроскина”

Посчитаем “черную” и “белую” сумму для наших \$100\$ чисел.

Если черная сумма больше, то Матроскин может собрать ее и выиграть. Соответственно, в ответе будет:

Matroskin

left

Если белая сумма больше, то Матроскин может собрать ее и выиграть. Соответственно, в ответе будет

Matroskin

right

Если суммы одинаковые, то Матроскин может собирать любую из них. Поэтому годятся оба вышеприведенных ответа.